# प्रत्यास्थता(Elasticity)

प्रत्यास्थता किसी वस्तु के पदार्थ का वह गुण है जिसके कारण वस्तु किसी विरुपक बल के द्वारा उत्पन्न आकार तथा आकृति के परिवर्तन का विरोध करती है और जैसे ही विरुपक बल हटा लिया जाता है वस्तु अपनी पूर्व अवस्था को प्राप्त कर लेती है।

**उदाहरण के लिए—**जब हम रबड़ की डोरी के एक सिरे को एक हाथ में पकड़कर दूसरे सिरे को दूसरे हाथ से खींचते है तो डोरी की लम्बाई बढ़ जाती है, परंतु छोड़ देने पर डोरी फिर पहली लम्बाई ले लेती है।

**<u>प्रत्यास्थता की सीमा (Limit of Elasticity):</u>** प्रत्यास्थ वस्तुएँ विरुपक बल को हटा देने पर अपनी पूर्व अवस्था को प्राप्त कर लेती हैं। परन्तु वस्तुओं में यह गुण विरुपक बल के एक विशेष मान तक ही रहता है। यदि विरुपक बल का मान बढ़ाते जायें तो एक अवस्था ऐसी आयेगी जब बल को हटा लेने पर वस्तु अपनी पूर्व अवस्था में नहीं लौटेगी। **उदाहरण के लिए—**यदि किसी दृढ़ आधार से लटके तार के निचले सिरे पर भार लटकाया जाए तो तार लम्बाई में बढ़ जाता है। भार को हटा लेने पर तार पुनः अपनी प्रारम्भिक लंबाई में आ जाता है। यदि लटकाए गये भार को धीरे – धीरे बढ़ाया जाए तो एक अवस्था ऐसी आ जाती है कि भार हटा लेने पर तार अपनी प्राम्भिक लंबाई में नहीं लौटता बल्कि उसकी लंबाई सदैव के लिए बढ़ जाती है। इस प्रकार प्रत्यास्थता का गुण नष्ट हो जाता है। किसी पदार्थ पर लगाये विरुपक बल की उस सीमा को जिसके अन्तर्गत पदार्थ का प्रत्यास्थता का गुण विद्यमान रहता है, उस पदार्थ की '**प्रत्यास्था की सीमा**' कहते हैं।

**प्रतिबल(Stress):** साम्यावस्था में वस्तु की अनुप्रस्थ – काट के एकांक क्षेत्रफल पर कार्य करने वाले आंतरिक प्रतिक्रिया–बल अथवा प्रत्यानयन–बल को '**प्रतिबल**' कहते हैं।

किसी वस्तु के अनुप्रस्थ–काट के क्षेत्रफल A पर बल F लगाया गया है, तो

$$\text{प्रतिबल} = \frac{\text{प्रत्यानयन बल}}{\text{क्षेत्रफल}} = \frac{F}{A}$$

प्रतिबल का S.I. मात्रक 'न्यूटन / मीटर$^2$' है तथा इसका विमीय सूत्र **$[ML^{-1}T^{-2}]$** है।

**विकृति (Strain):** वस्तु के एकांक आकार में होने वाले भिन्नात्मक परिवर्तन को 'विकृति' कहते हैं। **उदाहरण के लिए** किसी तार में भार लटकाने से उसकी लम्बाई बढ़ जाती है। लम्बाई में होने वाली वृद्धि तथा प्रारम्भिक लम्बाई के अनुपात को 'विकृति' कहते हैं। विकृति एक अनुपात है। अतः इसके कोई मात्रक नहीं होते है तथा यह एक विमाहीन राशि है।

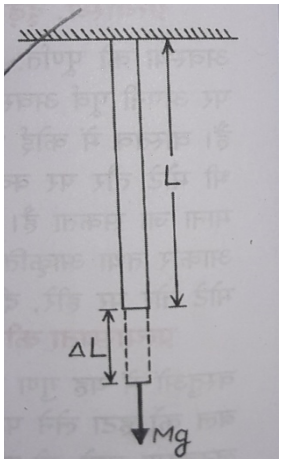
वस्तु पर विरुपक बल लगाने के अनुसार, विकृति भी तीन प्रकार की होती हैः अनुदैर्ध्य विकृति (Lengitudinal Strain), आयतन विकृति (Volume Strain) तथा अपरुपण विकृति (Shearing Strain)।

**हुक का नियम (Hooke's Law):** सन् 1979 में रॉबर्ट हुक ने यह बताया कि, ''लघु विकृतियों की सीमा के भीतर, पदार्थ पर कार्यरत प्रतिबल उसमें उत्पन्न विकृति के अनुक्रमानुपाती होता है।'' किसी दी हुई वस्तु की पदार्थ के लिए प्रतिबल तथा विकृति का अनुपात नियतांक होता है। इसे '**प्रत्यास्थता गुणांक** ' E कहते हैं। इस प्रकार

$$\text{प्रत्यास्थता गुणांक} = \frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}}$$

किसी पदार्थ का प्रत्यास्थता गुणांक जितना अधिक होता है वह उतना ही अधिक प्रत्यास्थ कहलाता है। किसी दिए हुए पदार्थ के लिए प्रत्यास्थता गुणांक का मान प्रतिबल और उत्पन्न विकृति के प्रकार पर निर्भर करता है। यदि विकृति अनुदैर्ध्य है तो प्रत्यास्थता गुणांक **'यंग प्रत्यास्थता गुणांक'** कहते हैं। यदि विकृति आयतन में है तो इसे **'आयतनात्मक प्रत्यास्थता गुणांक'** और विकृति अपरुपण है तो इसे **'दृढ़ता गुणांक (Modulas of Rigidity)'** कहते हैं।

**<u>यंग– प्रत्यास्थता गुणांक (Young's Modulas of Elasticity)–</u>** ''लघु विकृति के लिए, अनुदैर्ध्य प्रतिबल तथा अनुदैर्ध्य विकृति के अनुपात को उस वस्तु के पदार्थ का **<u>'यंग–प्रत्यास्थता गुणांक'</u>** कहते हैं।'' इसे 'Y' से प्रदर्शित करते हैं।




किसी तार की लम्बाई L तथा त्रिज्या r है। उसके एक सिरे को किसी दृढ़ आधार से बाँध कर, दूसरे सिरे से Mg भार लटकाया जाता है। मान लिया प्रत्यास्थता की सीमा में इससे उसकी लम्बाई में **l** की वृद्धि हो जाती है।

$$\textbf{प्रतिबल} = \frac{\text{बल (लटकाया गया भार)}}{\text{अनुप्रस्थ – काट का क्षेत्रफल}}$$

$$\textbf{विकृति} = \frac{\text{लम्बाई में वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई}} = \frac{\Delta L}{L}$$

तार के पदार्थ का यंग – प्रत्यास्थता गुणांक $= \frac{Mg/\pi r^2}{\Delta L/L} = \frac{MgL}{\pi r^2 \Delta L}$

' $\gamma$ ' का S.I. मात्रक 'न्यूटन/मीटर$^2$ '(अथवा पास्कल) तथा इसका विमीय सूत्र **$[ML^{-1}T^{-2}]$**। $\gamma$ का मान केवल ठोस के लिए ही निकाला जा सकता है तथा यह ठोस के पदार्थ का अभिलक्षण है।

**आयतनात्मक प्रत्यास्थता गुणांक (Bulk Modulas of Elasticity):–** लघु विकृति के लिए, अभिलक्षण प्रतिबल तथा आयतन विकृति के अनुपात को उस वस्तु के पदार्थ का 'आयतनात्मक प्रत्यास्थता गुणांक' कहते है। इसे 'B' से निरुपित करते है।

माना किसी वस्तु का प्रारम्भिक आयतन v है तथा उस पर दाब p डालने से उसके आयतन में परिवर्तन $\Delta v$ होता है तब

अभिलम्ब प्रतिबल = p

आयतन विकृति = $-\Delta v/v$

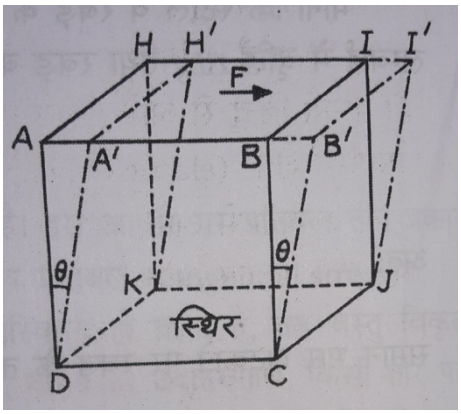
अतः वस्तु के पदार्थ का आयतनात्मक प्रत्यास्थता गुणांक

$$B=\frac{\text{अभिलम्ब प्रतिबल}}{\text{आयतन विकृति}}=\frac{p}{\left(\frac{-\Delta v}{v}\right)}=\frac{-pv}{\Delta v}$$

B का S.I. मात्रक 'न्यूटन/मीटर$^2$' (अथवा पास्कल) है तथा विमीय सूत्र **[$ML^{-1}T^{-2}$]** है।

**दृढ़ता गुणांक (Modulas of Rigility)**

लघु विकृति के लिए, अपरुपक प्रतिबल तथा अपरुपण विकृति के अनुपात को उस वस्तु के पदार्थ का **'दृढ़ता गुणांक'** कहते हैं। इसे ' $\eta$ ' से प्रदशित करते है।




चित्र में एक घनाकार ठोस का निचला पृष्ठ स्थिर कर दिया गया है। जब इसके ऊपरी पृष्ठ पर एक स्पर्शरेखीय बल F लगाया जाता है तो इसके समान्तर सभी परतें बल की दिशा में विस्थापित हो जाती है। इस प्रकार ठोस की नई आकृति हो जाती है। चित्र में ' $\theta$ ' अपरुपण विकृति है। यदि कोण ' $\theta$ ' छोटा हो तब

$$\theta=tan\theta=\frac{AA}{AD}$$

यदि ऊपरी पृष्ठ का क्षेत्रफल A हो तो

अपरुपक प्रतिबल $\frac{F}{A}$

अतः ठोस के पदार्थ का दृढ़ता गुणांक

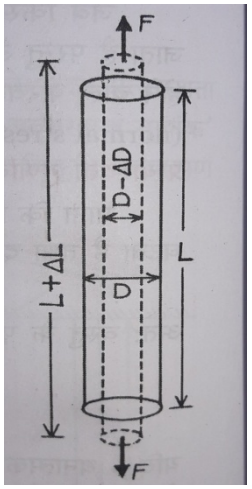
$$\eta=\frac{(F/A)}{\theta}=\frac{F}{A\theta}$$

दृढ़ता गुणांक का S.I. मात्रक 'न्यूटन / मीटर$^2$' (अथवा पास्कल) है तथा विमीय सूत्र **[ML$^{-1}$T$^{-2}$]** है।

## पॉयसन अनुपात(Poisson's Ratio)

जब किसी पर बराबर तथा विपरीत बल किसी निश्चित दिशा में लगाये जाते हैं, तो वस्तु का उस दिशा में आकार विस्तृत हो जाता है। उसी समय यह लम्बवत् दिशाओं में संकुचित भी हो जाती है। जिस दिशा में बल लगाये गये हैं, उस दिशा में भिन्नात्मक परिवर्तन को 'अनुदैर्ध्य विकृति' जबकि लम्बवत् दिशा में भिन्नात्मक परिवर्तन को 'पार्श्विक विकृति' कहते हैं।

'पार्श्विक विकृति' तथा 'अनुदैर्ध्य विकृति' के अनुपात को वस्तु के पदार्थ का 'पॉयसन अनुपात' कहते हैं। इसे ' $\sigma$ ' से निरुपित करते हैं।






चित्र में एक तार दिखाया गया है जिसकी प्रारम्भिक लम्बाई L है तथा व्यास D है। जब इसकी लम्बाई के अनुदिश बराबर तथा विपरीत दिशा में बल लगाये जाते है तब माना इसकी लम्बाई बढ़कर $L+\Delta L$ हो जाती है तथा व्यास घटकर $D-\Delta D$ हो जाता है, तब

अनुदैर्ध्य विकृति $\Delta L/L$

तथा पार्श्विक विकृति $\Delta D/D$

$\therefore$ पॉयसन अनुपात

$$\sigma=\frac{\text{पार्श्विक विकृति}}{\text{अनुद्धैर्य विकृति}}=\frac{(\Delta D/D)}{(\Delta L/L)}=\frac{\Delta D}{\Delta L}.\frac{L}{D}$$

इसका कोई मात्रक नहीं होता, यह विमाहीन है। अधिकतर ठोस पदार्थों के लिए इसका मान 0.25 तथा 0.35 के बीच होता है।

## दो दृढ़ आधारों के बीच कसे तार को ठण्डा करने पर उत्पन्न बलः–

माना L लम्बाई वाले व $\Delta$ अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल का तार दो दृढ़ आधारों के बीच कसा हुआ है। जब तार को ठण्डा किया जाता हैं, तो तार की लम्बाई घट जाती हैं,परन्तु तार दोनों सिरों पर कसा होने के कारण घट नहीं पाती है। अतः तार में एक तनाव बल उत्पन्न हो जाता है। जिससे वह क्लैम्पों पर भी बल लगाती है।

माना तार के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक $\gamma$ तथा अनुदैर्ध्य प्रसार गुणांक $\alpha$ है तार को $\Delta t$ ℃ तक तापमान में कमी हो तो तार की लम्बाई में कमी $\Delta t$ हो तो, तब

$$\alpha=\frac{\text{लम्बाई में कमी}}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई } x \text{ ताप में वृद्धि}}=\frac{\Delta L}{L\Delta t}$$

अतः तार में विकृति $\Delta L/L=\infty\Delta t$

तार के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक : $\gamma=\frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}}$

अतः प्रतिबल= $\gamma \times$ विकृति= $\gamma \propto \Delta t$

राशि $\gamma \propto \Delta t$ को तापीय प्रतिबल(Thermal Stress) कहते है।

परन्तु प्रतिबल =बल/क्षेत्रफल=F/A

अतः तार में उत्पन्न तनाव बल $F = \text{प्रतिबल} \times A = (\gamma \propto \Delta t) \times A$

अतः $f = \gamma A \propto \Delta t$

## किसी तार को खींचने में किया गया कार्य तथा प्रत्यास्थ ऊर्जा

जब हम किसी तार को खींचते है तो हमें तार के परमाणुओं के बीच कार्य करने वाले आकर्षण बलों के विरुद्ध कार्य करना पड़ता है यही कार्य खिंची तार में प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा के रुप में संचित हो जाता हैं।

सूत्र–

माना किसी तार की प्रारम्भिक लम्बाई L हैं। अनुप्रस्थ क्षेत्रफल A है। जब तार लम्बाई की दिशा में $°F$ बल लगाकर इसे खींचा जाता है,तो इसकी लम्बाई में वृद्धि l हो जाती है।

प्रारम्भ में बल F=0

l लम्बाई में वृद्धि होने पर बल =F

तार का औसत बल = $\frac{o+f}{2} = \frac{f}{2}$

तार को खींचने में कृत कार्य = औसत बल X विस्थापन= $\frac{f}{2} \times l$

यही कार्य तार की प्रत्यास्थता स्थितिज ऊर्जा के रुप में संचित हो जाता है।

तार की प्रत्यास्थता स्थितिज ऊर्जा, $U = \frac{1}{2} \times \text{बल} \times \text{विस्थापन}$ .....(1)

$\text{स्थितिज उर्जा}, U = \frac{1}{2} \times \text{बल} \times \text{खिचाव}$

समी0 (1) को निम्न प्रकार से भी लिखा जा सकता है।

$\text{स्थितिज उर्जा}, U = \frac{1}{2} \times \frac{F}{A} \times \frac{l}{L}(AL)$

परन्तु Al= अनुप्रस्थ परिछेद का क्षेत्रफल X लम्बाई = तार का आयतन (V)

$U = \frac{1}{2} \times \text{प्रतिबल } x \text{ विकृति } x \text{ तार का आयतन}$

∴ तार के प्रति एकांक आयतन में स्थितिज ऊर्जा

$$u = \frac{U}{V = AL} = \frac{1}{2} x \text{ प्रतिबल } x \text{ विकृति} \quad \text{.....(2)}$$

यंग प्रत्यास्थता गुणांक , $\gamma = \frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}}$, या विकृति= $\frac{\text{प्रतिबल}}{\gamma}$

यह मान सभी (2) में रखने पर

$u = \frac{1}{2} \times \text{प्रतिबल} \times \frac{\text{प्रतिबल}}{\gamma}$

या

$$u=\frac{1}{2}\times\frac{(\text{प्रतिबल})^2}{\gamma}$$

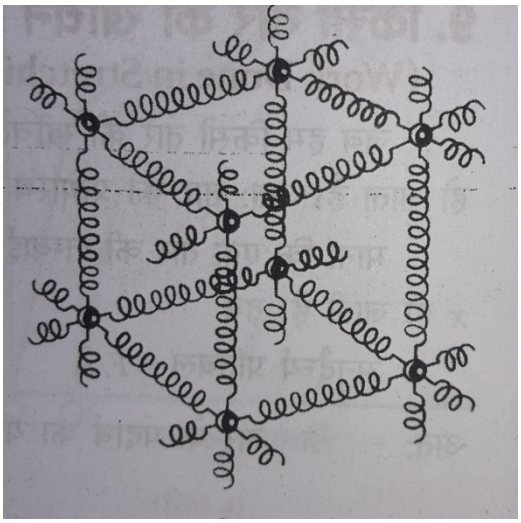
चूँकि प्रतिबल= $\gamma\times$ विकृति

यह मान समीकरण (2) में रखने पर

$$u=\frac{1}{2}\times\gamma\times(\text{विकृति})^2$$

## परमाणुविक मॉडल के आधार पर प्रत्यास्थता की व्याख्या

पदार्थों के प्रत्यास्थता के गुण को आणविक मॉडल के आधार पर समझाया जा सकता है। प्रत्येक पदार्थ परमाणुओं से मिलकर बना है। एक ठोस क्रिस्टल के परमाणु एक सम–व्यूह(Regular Array) में वैद्युत बलों के द्वारा इस प्रकार से बधें रहते है । इन्हें एक दूसरे से स्प्रिगों द्वारा जोड़ दिया जाता है। इन आन्तरिक परमाणवीय वैद्युत बलों के प्रभाव से ठोस अपनी स्वाभाविक साम्यावस्था में रहता है। ठोस के भीतर परमाणुओं में धन तथा ऋण आवेश इस प्रकार वितरित रहता है कि जब ठोस अपनी साम्या ठोस को इस प्रकार (बाह्य बल लगाकर) दबाया जाय जिससे परमाणुओं के बीच की दूरी कम हो जाय तो इस दशा में आवेशों का वितरण बदल जाता है।



इसे **अन्तरापरमाणु** बल कहते हैं। अन्तरापरमाणु बल हटा देने पर परमाणु इस प्रतिकर्षण के कारण एक दूसरे से हटकर पुनः अपनी प्रारम्भिक स्थितियों में आ जाते हैं। अर्थात ठोस अपनी प्रारम्भिक आकार में आ जाता है। इसी प्रकार जब बाह्य बल के द्वारा किसी ठोस को खींचते है तो परमाणुओं के बीच दूरी बढ़ जाती है। इस दशा में परमाणुओं में आवेशों का वितरण बदल जाता है और इनके बीच एक नेट आकर्षण बल कार्य करने लगता है। बाह्य बल हटा देने से परमाणु आकर्षण बल के कारण एक दूसरे के समीप आ जाता है और वे अपनी प्रारम्भिक स्थितियों में आ जाते हैं।

## अन्तरापरमाणु बल–नियतांक–

हम जानते है कि प्रत्येक पदार्थ (ठोस में) प्रत्येक परमाणु पास वाले परमाणु से घिरा रहता है। यह अन्तरापरमाणु बल द्वारा परस्पर बंधे रहते हैं तथा वे स्थिर अवस्था में रहते हैं। जब ठोस पर विरुपक बल लगाया जाता हैं, तो ठोस परमाणु अपनी साम्य स्थिति से विस्थापित हो जाते हैं।

अन्तरापरमाणु बल हटा देने पर अन्तरापरमाणु बल उन्हें फिर वापस प्रारम्भिक स्थितियों में ले जाते है और ठोस अपनी प्रारम्भिक स्थिति, आकृति तथा आकार में ले जाता हैं।

जब किसी स्प्रिंग को खींचा जाता है, तो स्प्रिंग में उत्पन्न प्रत्यानयन बल F , स्प्रिंग की लम्बाई में होने वाली वृद्धि $x$ के अनुक्रमानुपाती होती हैं।

$$F=kx$$

k= स्प्रिंग का बल नियतांक

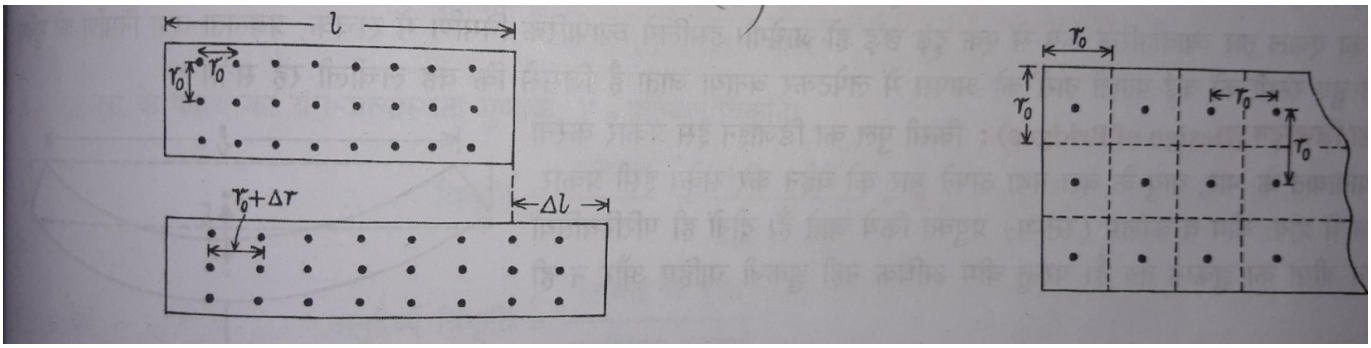
इसी प्रकार ठोस पर बाह्य बल लगाने पर परमाणुओं के बीच की दूरी बदल जाती है। इससे परमाणुओं के बीच उत्पन्न (अन्तरा परमाणु) बल $F'$ तथा उनके बीच की दूरी परिवर्तन $\Delta r$ के अनुक्रमानुपाती है।

$$F'=k.\Delta r.....(i)$$

जहां $k$ = अन्तरापरमाणु बल नियतांक

माना कि किसी तार के परमाणु के बीच साम्य दूरी $r_0$ हैं। तार की लम्बाई $l$ है। तार पर बाह्य बल $F$ लगाने पर तार की लम्बाई में $\Delta l$ वृद्धि होती है। परमाणु के बीच की दूरी $r_0$ से बढ़कर $r_0+\Delta r$ हो जाती है।

अनुदैर्ध्य विकृति= $\frac{\Delta l}{l}=\frac{\Delta r}{r_0}.....(ii)$




चूंकि परमाणुओं के बीच की दूरी $r_0$ है, तार के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल $r_0^2$ है, $r_0^2$ क्षेत्रफल में परमाणुओं की औसतन 1 कड़ी होगी अर्थात अनुप्रस्थ काट के प्रति एकांक क्षेत्रफल में $\frac{1}{r_0^2}$ कड़ियॉ होगी। अतः यदि तार का अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल $A$ हो तो उसमें कड़ियों की संख्या $\frac{A}{r_0^2}$ होगी,

इस प्रकार अन्तरापरमाणु बल

$$F'=\frac{\text{वाह्य बल}}{\text{कड़ियों की संख्या}}=\frac{F}{\frac{A}{r_0^2}}=\frac{Fr_0^2}{A}$$

परन्तु समी $(ii)$ से

$$\frac{r_0}{\Delta r}=\frac{l}{\Delta l}$$

$$\therefore K=\frac{F}{A}X\frac{l}{\Delta l}r_0=\frac{F/A}{\Delta l/l}r_0$$

परन्तु $\frac{F/A}{\Delta l/l}=\gamma$

$$\therefore K=\gamma r_0$$

**<u>प्रत्यास्थता के व्यवहारिक उपयोग–</u>**

- पुलों की डिजाइन बनाने में
- क्रेनों की धात्विक रस्सियां बनाने में
- पृथ्वी पर पर्वत की अधिकतम ऊँचाई का अनुमान लगाने में।

**<u>अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न</u>**

प्र0– तांबा,इस्पात तथा रबर का प्रत्यास्थता के घटते क्रम में लिखिए।

उत्तर–इस्पात, तांबा, तथा रबर।

प्रश्न– विरुपक प्रतिबल, विरुपक विकृति की परिभाषा दीजिए।

प्रश्न– प्रतिबल किसे कहते हैं।

प्रश्न– भंजक प्रतिबल से क्या तात्पर्य हैं।

प्रश्न– रेल की पटरी $I$ आकार की क्यों बनायी जाती हैं।

उत्तर– रेल की पटरी के ऊपर तथा नीचे के तल अधिक विकृत होते है। अतः उनके क्षेत्रफल अधिक होने चाहिए। जिससे उन पर दाब अथवा अभिलम्ब प्रतिबल $(F/A)$ कम लगे। बीच के भाग पर बहुत कम विकृति होती है। अतः वे कम चौड़ाई के बनाये जाते है। क्योंकि इसमें लोहे की बचत होती है।

प्रश्न– हुक सम्बन्धी नियम लिखिए।

प्रश्न–दृढ़ता गुणांक की परिभाषा लिखिए।

प्रश्न–रबर की तुलना में स्टील अधिक प्रत्यास्थ है। क्यों?

**सन्दर्भ किताबों की सूची–**


- एन0सी0ई0आर0टी0
- सत्य प्रकाश नवीन प्रकाशन
- कुमार मित्तल
- स्टूडेन्ट एडवाइजर