==================================

अवकलन समीकरण
(Differentail Equation)

==================================

Made by:
Kaustubh Chandra Joshi,
Principal, G.I.C.Pattharkhani
(Pithoragarh)

अवकलन समीकरण (Differential Equations):

एक ऐसा समीकरण जिसमें स्वतंत्र चर के सापेक्ष आश्रित चर के अवकलज सम्मिलित हो, अवकलन समीकरण कहलाता है।

जैसे: $x\frac{dy}{dx} = y$ अवकलन समीकरण है।

अवकलन समीकरण की कोटि (Order of Differential Equations):

उस अवकलन समीकरण में सम्मिलित स्वतंत्र चर के सापेक्ष आश्रित चर के उच्चतम कोटि के अवकलज की कोटि द्वारा परिभाषित होती है।

जैसे: $\frac{dy}{dx} = x^2$, $\frac{d^2y}{dx^2} + 3x = y$ में क्रमश: 1 और 2 कोटि की अवकलज समीकरण है।

अवकलन समीकरण की घात (Degree of Differential Equations):

उस अवकलन समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि के अवकलज की उच्चतम घात को अवकलन समीकरण की घात कहते है।

जैसे: $\frac{dy}{dx} = \sin x$, $\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{dy}{dx} = 0$ में क्रमश: 1 और 1 घात की अवकलज समीकरण है।

अवकलन समीकरण के निर्माण की प्रक्रिया :
(Procedure to form a Differential Equations):

1. एक प्राचल a वाले वक्रों के कुल की समीकरण f(x, y, a) =0 --------------------(1)

समीकरण (1) को x के सापेक्ष अवकलन करने पर $g(x, y, \frac{dy}{dx}, a) = 0$--------------(2)

समीकरण (1) तथा (2) से प्राचल a को विलुप्त करने से अवकलन समीकरण

$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ ---------------(3) प्राप्त होगी।

2. दो प्राचल a, b वाले वक्रों के कुल की समीकरण f(x, y, a,b) =0 --------------------(4)

समीकरण (3) को x के सापेक्ष अवकलन करने पर $g(x, y, \frac{dy}{dx}, a, b) = 0$--------------(5)

समीकरण (4) को x के सापेक्ष अवकलन करने पर $g(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2x}{dx^2}, a, b) = 0$--(6)

समीकरण (4), (5) तथा (6) से प्राचल a, b को विलुप्त करने से अवकलन समीकरण

$F(x, y, \frac{dy}{dx}=F(x), \frac{d^2y}{dx^2}) = 0$ ------------- (3) प्राप्त होगी।

प्रथम कोटि एंव प्रथम घात के अवकलन समीकरणों का हलः

(Solution of First Order, First Degree Differential Equations):

1.चर पृथक्करण रूप(Variable Separation Form):

माना कि अवकलन समीकरण हैः $\frac{dy}{dx}=x^n$ ....(1)

यदि को हम $\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)}$ के रूप में व्यक्त कर सकते है।

अतः g(y).dy = f(x).dx --------------------------(2)

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$\int g(y)dy = \int f(x)dx$

$\Rightarrow$ G(y) = F(x) +C , जो कि अवकलन समीकरण का अभीष्ट हल है।

2. समघातीय रूप(Homogenous Form):

$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)}$ ....(1)

के रूप वाला अवकलन समीकरण समघातीय कहलाता है यदि F(x, y) शून्य घात वाला समघातीय फलन है।

$\frac{dy}{dx}=F(x,y)=f\left(\frac{y}{x}\right)$ अथवा $\frac{dy}{dx}=F(x,y)=g\left(\frac{x}{y}\right)$

अब $\frac{y}{x}=v$ अर्थात y = vx लेने पर $\frac{dy}{dx}=v+x\left(\frac{dv}{dx}\right)$ ....(2)

समीकरण (2) से $\frac{dy}{dx}$ का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$v+x\frac{dv}{dx}=f(v) \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=f(v)-v$ ....(3)

चरों को पृथक करने पर

$\frac{dv}{f(v)-v}=\frac{dx}{x}$ ....(4)

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$\int\frac{dv}{f(v)-v} = \int\frac{dx}{x} + C$ ————————(5)

अब v को $\frac{y}{x}$ से प्रतिस्थापित कर दिया जाय तो समीकरण (5), समघातीय अवकलन समीकरण (1) का व्यापक हल प्रदान करता है।

3. रैखिक समीकरण(Linear Equation):

अवकलन समीकरण का रूप $\frac{dy}{dx}+P.y=Q$ .... (1),

जहॉ P तथा Q अचर है, प्रथम कोटि का रैखिक अवकलन समीकरण कहलाता है। रैखिक अवकलन समीकरण (1) को फलन g(x) से दोनों पक्षों को गुणा करने से–

$g(x)\frac{dy}{dx}+P.g(x).y=Q.g(x)$ ....(2)

g(x) का चयन इस प्रकार करते है कि बायॉ पक्ष y.g(x) का अवकलज बन जाए।

$\Rightarrow \quad g(x)\frac{dy}{dx}+P.g(x).y=\frac{d}{dx}[y.g(x)]$

$$\Rightarrow g(x)\frac{dy}{dx}+P.g(x).y=g(x).\frac{dy}{dx}+y.\frac{d}{dx}[g(x)]$$

$$\Rightarrow P.g(x) = g'(x),$$

$$\Rightarrow P = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$\Rightarrow \int P\,dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$$

$$\Rightarrow \int P\,dx = \log\{g(x)\}$$

$$\Rightarrow g(x) = e^{\int P\,dx} \text{ ---------------------(3)}$$

समीकरण (2) में फलन g(x) का मान रखने से–

$$e^{\int P\,dx}.\frac{dy}{dx} + P.e^{\int P\,dx}.y = Q.e^{\int P\,dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(y.e^{\int P\,dx}) = Q.e^{\int P\,dx}$$

$$\Rightarrow y.e^{\int P\,dx} = \int Q.e^{\int P\,dx}\,dx$$

जो कि रैखिक अवकलन समीकरण का व्यापक हल प्रदान करता है।

उदाहरण(Example)

उदाहरण 1: अवकलन समीकरण $\sec^2x \tan y\, dx + \sec^2y \tan x\, dy = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल 1: $\sec^2x \tan y\, dx + \sec^2y \tan x\, dy = 0$

$$\Rightarrow \frac{\sec^2 x dx}{\tan x} + \frac{\sec^2 y dy}{\tan y} = 0$$

अब दोनों पक्षों में समाकलन करने पर–

$$\int \frac{\sec^2 x dx}{\tan x} + \int \frac{\sec^2 y dy}{\tan y} = \log(C)$$

$$\Rightarrow \log(\tan x) + \log(\tan y) = \log(C)$$

$$\Rightarrow \log(\tan x.\tan y) = \log(C)$$

$$\Rightarrow (\tan x.\tan y) = (C)$$

$\Rightarrow \tan x . \tan y = C$, व्यापक हल हैं।

उदाहरण 2: सिद्व कीजिए अवकलन समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x}$ समघात समीकरण है तथा व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल 2: $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$

जो स्पष्टतः समघात अवकलन समीकरण है।

माना कि y = vx लेने पर, जिससे $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$

अब समघात अवकलन समीकरण $v+x\frac{dv}{dx}=\frac{x+vx}{x} = 1+v$

$\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=1$

$\Rightarrow dv=\frac{dx}{x}$

दोनों पक्षों का अवकलन करने से, $\int dv=\int\left[\frac{dx}{x}\right]$

$\Rightarrow v = \log|x|+c$

$\Rightarrow \frac{y}{x} = \log|x|+c$

$\Rightarrow y = x\log|x|+cx$, अपेक्षित हल है।

उदाहरण 3: अवकलन समीकरण $\frac{dy}{dx}-3y\cot x=\sin 2x$, y = 2 जब कि x = $\frac{\Pi}{2}$ का मुख्य हल ज्ञात कीजिए।

हल 3: $\frac{dy}{dx}-3y\cot x=\sin 2x$

जो स्पष्टतः रैखिक अवकलन समीकरण है।

जब कि P = - 3 cot x , Q = sin 2x

I.F. = $e^{\int P\,dx}$

$\int P dx=\int -3\cot x dx=-3\log|\sin x|$

I.F. = $e^{\int P\,dx}$

$\Rightarrow$ I.F. = $e^{-3\log\sin x}$ = $\sin^{-3}(x)$ = $cosec^3(x)$

I.F. से गुणा कर समाकलन करने पर:

y. $\text{cosec}^3(x) = \dfrac{\int \sin 2x . cosec^3 x dx}{\sin^3 x}$

$\Rightarrow$ y. $\text{cosec}^3(x) = 2\int \cot x . cosec x dx = -2\, cosec x + c$

$\Rightarrow$ y = $-2 \sin^2 x + c \sin^3 x$

जब x= $\dfrac{\Pi}{2}$ तो y = 2

$\Rightarrow 2 = -2\sin^2\dfrac{\Pi}{2} + c \quad \Rightarrow$ c = 4

अतः अपेक्षित विशिष्ट हल y = $-2 \sin^2 x\,(1 - 2 \sin x)$

References: निम्न संदर्भों द्वारा संकलित एंव ICT कार्यो हेतु निःशुल्क प्रसारित–

1.विद्यालयी शिक्षा परिषद, उत्तराखण्ड द्वारा निर्धारित पाठ्यपुस्तक–गणित, कक्षा–12, अध्याय–9.

2- सहायक पाठ्य पुस्तक student advisor- डा0 आर0के0 श्रीवास्तव,S. P. institute of science & technology,Gorakhpur: गणित कक्षा–12, भाग–2, अध्याय–9.

3- सहायक पाठ्य पुस्तक Modern's abc-सत्यदेव नारायण सिंहा,P.G. college समस्तीपुर, बिहार: गणित कक्षा–12,भाग–2, अध्याय–9.

4- computer hardware – software.