[Class XII, Subject-Mathematics, Chapter – 8]

समाकलनों के अनुप्रयोग

Application of Integrals

Prepared By -
Mr. Govind Ballabh Pant
Lecturer Maths
TRSB GIC Kamleshwar
Pithoragarh

समाकलनों के अनुप्रयोग

इस अध्याय में साधारण वक्रों के अंतर्गत सरल रेखाओं, वृत्तों, परवलयों तथा दीर्घ वृत्तों (केवल मानक रूप) की चापों के बीच घिरे क्षेत्रफल को ज्ञात करने के लिए समाकलनों के एक विशिष्ट अनुप्रयोग का अध्ययन करेंगे

साधारण वक्रों के अंतर्गत क्षेत्रफल

दिए वक्र $y = f(x)$, x अक्ष, कोटियां $x = a$ तथा $x = b$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए प्रारंभिक क्षेत्रफल dA ज्ञात करते हैं

पूरे घिरे क्षेत्रफल को बहुत सारी आयताकार पट्टियों से घिरा माना जा सकता है उनमे से एक पट्टी का क्षेत्रफल प्रा० क्षेत्रफल dA कहलाता है

आयताकार पट्टी का क्षे० = लम्बाई * चौड़ाई

$$dA = y\,dx$$

पुनः $x = a$ व $y = b$ के बीच सभी पट्टियों के क्षेत्रफलों का योगफल

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

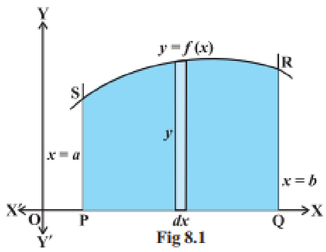
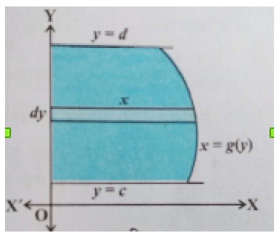


Fig 8.1

पुनः यदि वक्र $x = g(y)$, y अक्ष, $y = c$, $y = d$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्र ज्ञात करने के लिए,

$$A = \int_c^d x\,dy = \int_c^d g(y)\,dy$$



यहाँ क्षैतिज पट्टियों पर विचार करेंगे

नोट - यदि वक्र की स्थिति x-अक्ष से नीचे है तो क्षेत्र का क्षेत्रफल ऋणात्मक हो जाता है तो हम इसके निरपेक्ष मान को लेते हैं

निरपेक्ष मान $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$

कुछ वक्रों के प्रामाणिक रूप

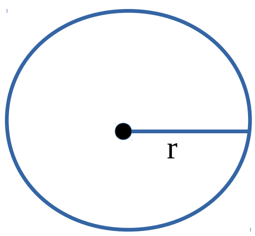
1) **वृत्त** -

केंद्र O(h, k), त्रिज्या r तो

प्रामाणिक रूप – $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

यदि केंद्र मूल बिंदु O(0,0) हो तो वृत्त का समीकरण

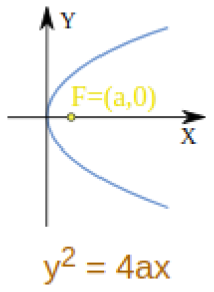
$$x^2 + y^2 = r^2$$



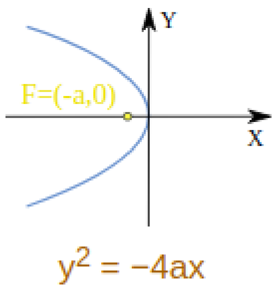
2) परवलय -

1 व 2 दोनों वक्र x-अक्ष के सममित हैं

1) $y^2 = 4ax$

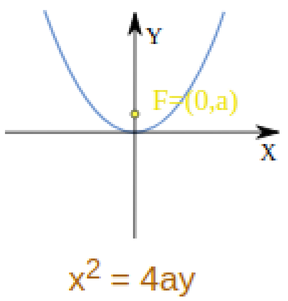


2) $y^2 = -4ax$

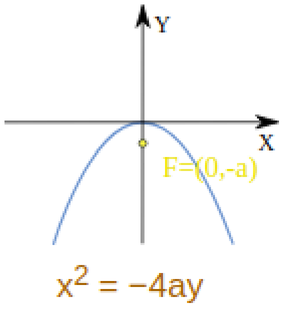


3 व 4 दोनों वक्र y-अक्ष के सममित हैं

3) $x^2 = 4ay$

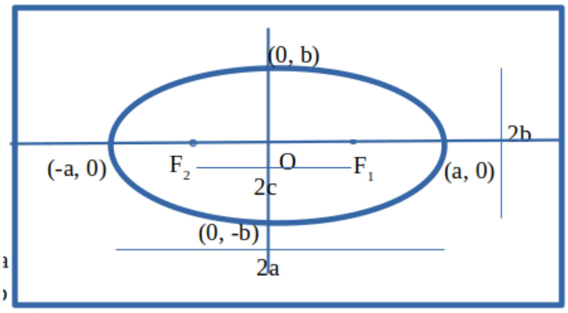


4) $x^2 = -4ay$



3) दीर्घ वृत्त -

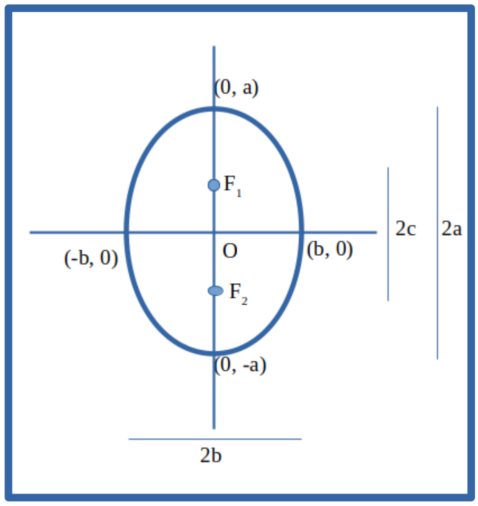
A) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



$a^2 > b^2$, तो दीर्घ अक्ष x-अक्ष है |

1) दीर्घ अक्ष की लम्बाई = 2a
2) लघु अक्ष की लम्बाई = 2b
3) नाभियों के बीच की दूरी = 2c
4) a, b, c में सम्बन्ध
$c^2 = a^2 - b^2$

B) $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$



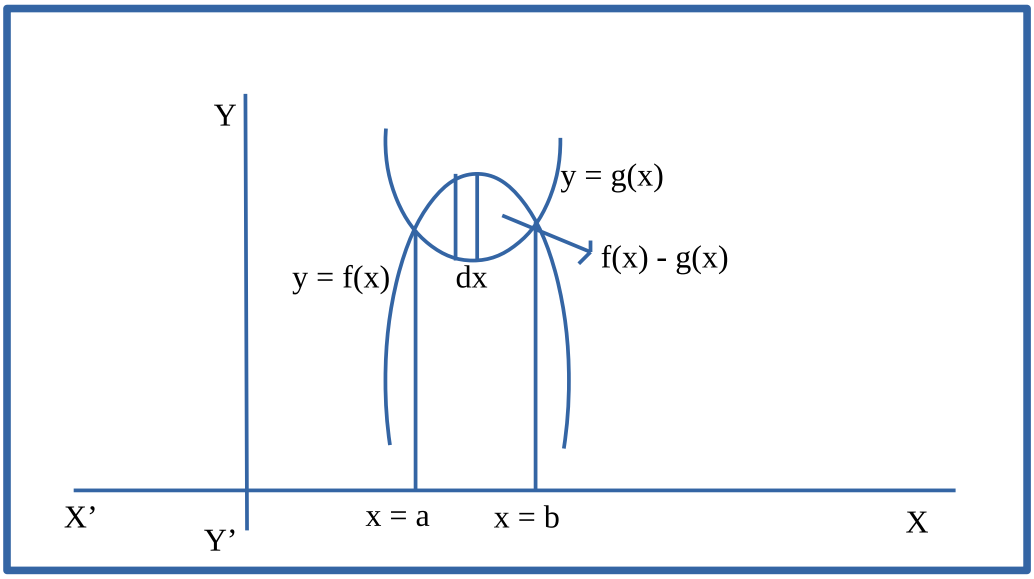
$a^2 > b^2$, तो दीर्घ अक्ष y-अक्ष है |

1) दीर्घ अक्ष की लम्बाई = 2a
2) लघु अक्ष की लम्बाई = 2b
3) नाभियों के बीच की दूरी = 2c
4) a, b, c में सम्बन्ध
$c^2 = a^2 - b^2$

दो वक्रों के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल
Area between two curves

माना दो वक्र $y = f(x)$ और $y = g(x)$ दिए गए हैं
अंतराल [a, b] में यदि $f(x) \geq g(x)$ तो प्रारंभिक क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए प्रारंभिक पट्टी की ऊंचाई $f(x) - g(x)$ होगी और चौड़ाई dx होगी
अतः प्रारंभिक क्षेत्रफल $dA = [f(x) - g(x)]\, dx$

तथा कुल क्षेत्रफल $A = \int_a^b [f(x)-g(x)]\, dx$



उदाहरण

उदाहरण 1) वक्र $y^2 = x$, रेखाओं $x = 1$, $x = 4$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का प्रथम पाद में क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये ।

हल - परवलय $y^2 = x$, x अक्ष के सममित है जिसका शीर्ष मूल बिंदु O(0,0) है ।
रेखाओं $x = 1$, $x = 4$, x अक्ष एवं वक्र $y^2 = x$ से घिरा क्षेत्रफल चित्र में छायांकित भाग है |

ABCD का क्षेत्रफल

$$= \int_1^4 y\,dx$$

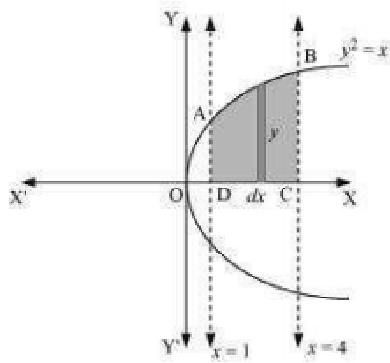
$$= \int_1^4 \sqrt{x}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$= \frac{2}{3}\left[4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right]$$

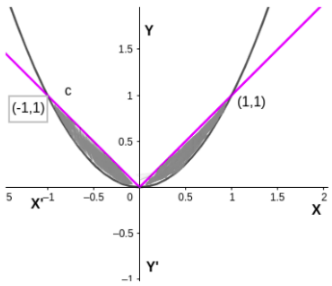
$$= \frac{2}{3}[8 - 1]$$

$$= \frac{14}{3}\ sq\ units$$



उदाहरण 2) परवलय $y = x^2$ एवं $y = |x|$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये |

हल :- परवलय $x^2 = y$ का शीर्ष मूलबिंदु है तथा यह ऊपर की तरफ खुलता है |
समीकरण $y = |x|$, मूलबिंदु से जाने वाली दो रेखाओं $y = x$ तथा $y = -x$ को निरूपित करता है जो x-अक्ष की धनात्मक दिशा से क्रमशः 45° तथा 135° के कोण बनाती है |
रेखाएं $y = x$ तथा $y = -x$, परवलय $y = x^2$ को क्रमशः मूलबिंदु O(0,0) और बिंदुओं A(1,1) तथा B(-1,1) पर प्रतिच्छेद करती हैं |
अभीष्ट क्षेत्र चित्र में रेखांकित भाग से दिखाया गया है दोनों क्षेत्र, y-अक्ष के सममित हैं |



अभीष्ट क्षेत्रफल = 2 (प्रथम चतुर्थांश में रेखांकित क्षेत्रफल)

$$= 2\left[\int_0^1 y(\text{रेखा के लिए})dx - \int_0^1 y(\text{वक्र के लिए})dx\right]$$

$$= 2\left[\int_0^1 xdx - \int_0^1 x^2dx\right]$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{3}$$

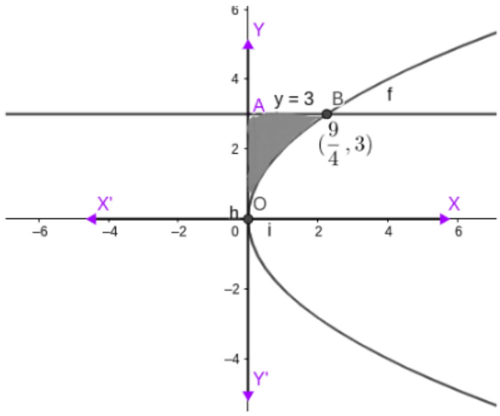
$$= 1 - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\, sq\ units$$

उदाहरण 3) वक्र $y^2 = 4x$, y-अक्ष एवं रेखा $y = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये

हल :- वक्र $y^2 = 4x$ एक परवलय है जिसका शीर्ष मूलबिंदु है और यह x-अक्ष के सममित है |

वक्र $y^2 = 4x$, y-अक्ष तथा रेखा $y = 3$ से घिरा क्षेत्र चित्र में रेखांकित भाग से दिखाया गया जो कि AOBA है |



$$\text{अभीष्ट क्षेत्रफल AOBA} = \int_0^3 x(\text{वक्र के लिए })dy$$

$$= \int_0^3 \frac{y^2}{4}\,dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^3 y^2 dy$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3^3}{3} - 0\right]$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{27}{3} = \frac{1}{4} \times 9$$

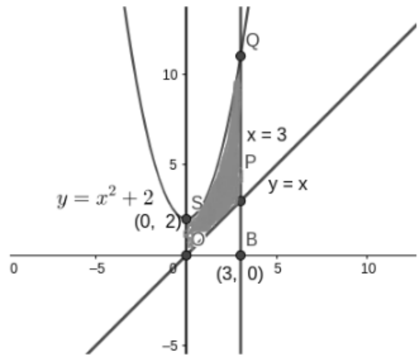
$$= \frac{9}{4}\, sq\ units$$

उदाहरण 4) वक्रों $y = x^2 + 2$, $y = x$, $x= 0$ एवं $x = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये

हल :- वक्र $y = x^2 + 2$ एक परवलय है जिसका शीर्ष (0,2) y-अक्ष पर स्थित है । $y = x$ एक सरल रेखा है जो की मूलबिंदु से होकर जाती है ।

$x = 0$, y-अक्ष है तो $x = 3$ एक सरल रेखा है जो y-अक्ष से 3 इकाई की दूरी पर है । अभीष्ट क्षेत्र वक्र $y = x^2 + 2$, $y = x$, $x = 0$ तथा $x = 3$ से घिरा हुआ है जिसे चित्र में छायांकित किया गया है ।

$y = x^2 + 2$ तथा $x = 3$ के प्रतिच्छेद बिंदु के निर्देशांक (3, 11) हैं |



अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र PQSOP का क्षेत्रफल = क्षेत्र OBPQSOB का क्षेत्रफल - क्षेत्र OBP का क्षेत्रफल

$$= \int_0^3 y(\text{परवलय के लिए })dx - \int_0^3 y(\text{रेखा } y = x \text{ के लिए })dx$$

$$= \int_0^3 (x^2 + 2)\ dx - \int_0^3 x\ dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \ + 2x\right]_0^3 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3$$

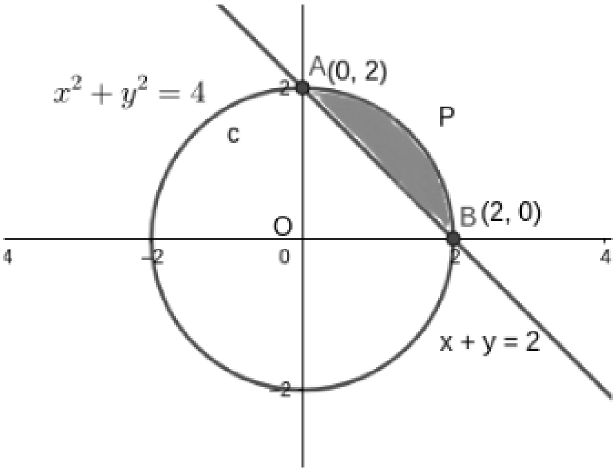
$$= \left[\frac{3^3}{3} + 2 \times 3 - 0 - 0\right] - \left[\frac{9}{2} - 0\right]$$

$$= \frac{27}{3} + 6 - \frac{9}{2} = 9 + 6 - \frac{9}{2} = 15 - \frac{9}{2}$$

$$= \frac{21}{2}\, sq\ units$$

उदाहरण 5) वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ एवं रेखा $x + y = 2$ से घिरे लघु भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये |

हल - चित्र में वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ तथा रेखा $x + y = 2$ से घिरे छोटे भाग का क्षेत्रफल छायांकित किया गया है |



अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र OBPAO का क्षेत्रफल - tri(OAB) का क्षेत्रफल

$$= \int y \text{ (वृत्त } x^2+y^2=4 \text{ के लिए)}dx - \int y \text{ (रेखा } x+y=2 \text{ के लिए)}dx$$

$$= \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\ dx - \int_0^2 (2-x)\ dx$$

$$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2 - \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

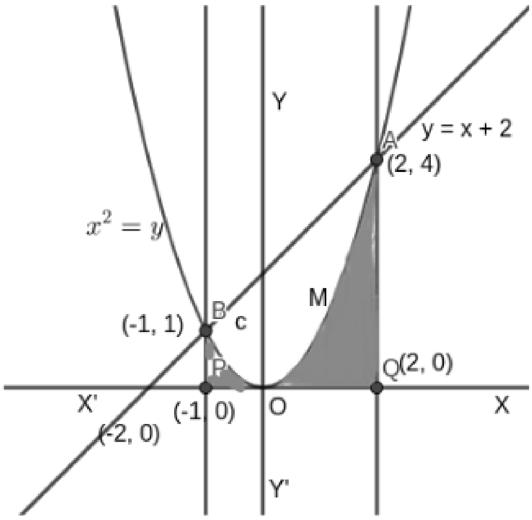
$$= \frac{2}{2}\sqrt{4-4} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{2}{2} - \left[\frac{0}{2}\sqrt{4-0} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{0}{2}\right] - \left[2(2) - 2\times 0 - (\frac{2^2}{2} - 0)\right]$$

$$= 0 + 2\sin^{-1}1 - 0 + 0 - 4 + 2$$

$$= 2 * \frac{\pi}{2} - 2 = (\pi - 2)$$

उदाहरण 6) परवलय $x^2 = y$, रेखा $y = x + 2$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये |

हल :- परवलय का शीर्ष मूलबिंदु है तथा यह y-अक्ष के सममित है और ऊपर की तरफ खुलता है | रेखा $y = x + 2$, x-अक्ष से बिंदु L(-2 , 0) पर मिलती है |
परवलय तथा रेखा $y = x + 2$ के प्रतिच्छेद बिंदु तथा हैं | परवलय , रेखा एवं अक्ष से घिरे क्षेत्र को चित्र में छायांकित किया गया है |



अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्र BPOQAB का क्षेत्रफल

= क्षेत्र POQABP का क्षेत्रफल - क्षेत्र BOMAB का क्षेत्रफल

$$= \int y(\text{रेखा } y = x + 2 \text{ के लिए })dx - \int y(\text{परवलय } x^2 = y \text{ के लिए })dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (x+2)\ dx - \int_{-1}^{2} x^2 dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left[\frac{2^2}{2} + 2 \times 2 - \frac{(-1)^2}{2} - (2) \times (-1)\right] - \frac{1}{3}\left[2^3 - (-1)^3\right]$$

$$= 2 + 4 - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} \times [8 + 1]$$

$$= 8 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times 9 = \frac{15}{2} - 3$$

$$= \frac{9}{2}\ sq\ units$$

उदाहरण 7) समाकलन विधि का उपयोग करते हुए वक्र |x| + |y| = 1 से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये ।

हल - समीकरण |x| + |y| = 1 से चार सरल रेखाएं प्राप्त होती हैं |

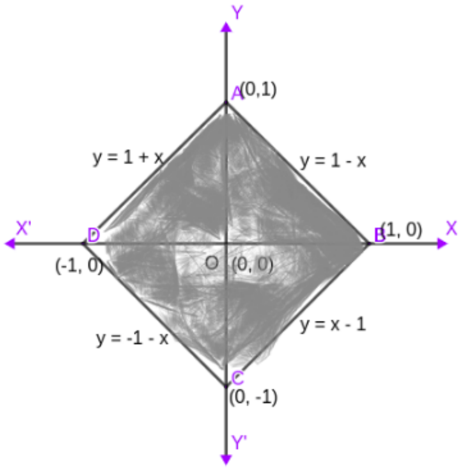
(i) यदि $x > 0$, $y > 0$, तब $x + y = 1$ या $y = 1 - x$

(ii) यदि $x< 0$, $y > 0$, तब $-x + y = 1$ या $y = 1 + x$

(iii) यदि $x > 0$, $y < 0$, तब $x – y = 1$ या $y = x - 1$

(iv) यदि $x < 0$, $y < 0$, तब $– x – y = 1$ या $y = - x - 1$

चारो रेखाओं से घिरे क्षेत्र को चित्र में छायांकित किया गया है |



अभीष्ट क्षेत्रफल = चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

$$= 4 \times tri(AOB) \text{का क्षेत्रफल}$$

$$= 4 \int_0^1 y dx$$

$$= 4 \int_0^1 (1 - x) \ dx$$

$$= 4 \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$= 4 \left[1 - \frac{1}{2} - (0 - 0) \right]$$

$$= 4 \times \frac{1}{2}$$

= 2 sq units

<u>वक्र अनुरेखण में सदैव स्मरणीय</u>

<u>सममिति -</u>

- यदि वक्र के समीकरण में y की सभी घातें सम हैं , तो वक्र x–अक्ष के सापेक्ष सममित होता है ।
- यदि वक्र के समीकरण में x की सभी घातें सम हैं , तो वक्र y–अक्ष के सापेक्ष सममित होता है ।
- यदि वक्र के समीकरण में दोनों की सभी घातें सम हैं , तो वक्र दोनों अक्षों के सापेक्ष सममित होता है ।
- यदि वक्र के समीकरण में x व y को परस्पर बदलने से कोई परिवर्तन नहीं हो, तो वक्र रेखा के सापेक्ष सममित होता है ।
- यदि वक्र के समीकरण में अचर पद नहीं हैं तो वक्र मूल बिंदु से गुजरेगा ।
- वक्र के समीकरण में y = 0 और x = 0 रखने पर क्रमशः x–अक्ष और y–अक्ष के साथ वक्र के प्रतिच्छेदन बिंदु प्राप्त होते हैं

  जैसे वक्र – $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, x–अक्ष को (±a, 0) तथा y–अक्ष को (0, ±b)पर काटेगा ।

अभ्यास प्रश्नावली

1) वृत्त $x^2 + y^2 = 8x$ तथा परवलय $y^2 = 4x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये ।

2) वक्र $y = \sqrt{1-x^2}$, रेखा y = x तथा धनात्मक x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये ।

3) त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये जिसके शीर्षों A, B तथा C के निर्देशांक क्रमशः (2,3), (4,7) तथा (6,2) है ।

4) परवलयों $y^2 = 4x$ तथा $x^2 = 4y$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये ।

उत्तर 1) $\frac{4}{3}[8+3\pi]$ sq unit **2)** $\frac{\pi}{8}$ sq unit **3)** 9 sq unit **4)** 16/3 sq unit

<u>आभार</u> - विद्यालयी शिक्षा परिषद्, उत्तराखंड द्वारा निर्धारित पाठ्य-पुस्तकें एवं सहायक पाठ्य पुस्तकें |