==============================

प्रायिकता

(Probability)

===================================

Made by:
Kaustubh Chandra Joshi,
Principal,
G.I.C.Pattharkhani
(Pithoragarh)

सप्रतिबंध प्रायिकता (Conditional probability):

यदि A एंव B किसी यादृच्छिक परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि से सम्बन्धित दो घटनाएँ इस प्रकार है कि A के घटित होने के पश्चात B घटित हो, तो A के घटित होने के पश्चात B के घटित होने की प्रायिकता को B की सप्रतिबंध प्रायिकता कहते है। इसे $P(\frac{B}{A})$ से सूचित करते है।

$$P(\frac{B}{A})=\frac{P(B\cap A)}{p(A)}, P(A)\neq 0$$

सप्रतिबंध प्रायिकता के गुण(Properties of conditional probability):

माना कि एक प्रदिदर्श समष्टि की दो घटनाएँ A एंव B है तथा S की A एक ऐसी घटना है कि $P(A)\neq 0$ तो

I. माना कि एक प्रदिदर्श समष्टि की दो घटनाएँ A एंव B है तो $P(\frac{S}{A})=P(\frac{A}{A})=1$

II. माना कि एक प्रदिदर्श समष्टि की दो घटनाएँ E एंव F है तथा S की A एक ऐसी घटना है कि $P(A)\neq 0$ तो $P(\frac{E\cup F}{A})=P(\frac{E}{A})+P(\frac{F}{A})$

III. $P(\frac{B'}{A})=1-P(\frac{B}{A})$

प्रायिकता का गुणन नियम(Multiplication theorem of probability):

$$P(\frac{B}{A})=\frac{P(B\cap A)}{p(A)}, P(A)\neq 0$$

$$\Rightarrow \quad P(B\cap A)=P(A).P(\frac{B}{A}), P(A)\neq 0 \quad ....(1)$$

तथा $P(\frac{A}{B})=\frac{P(A\cap B)}{p(B)}, P(B)\neq 0$

$$\Rightarrow \quad P(A\cap B)=P(B).P(\frac{A}{B}) \quad ....(2)$$

(1) , (2) से $P(A\cap B)=P(B).P(\frac{A}{B})=P(A).P(\frac{B}{A})$ को प्रायिकता का गुणन नियम कहते है।

स्वतंत्र घटनाएँ(Independent events):

यदि A एंव B घटनाएँ इस प्रकार है कि एक घटना के घटित होने पर के पश्चात दूसरी घटना पर प्रभाव नही होता हो, तो इस प्रकार की घटनाओं को स्वतंत्र घटनाएँ कहते है।

A एंव B घटनाएँ स्वतंत्र घटनाएँ कहते है,यदि

$$P(\frac{B}{A})=P(B), P(A)\neq 0 \quad ,$$

$$P(\frac{A}{B})=P(A), P(B)\neq 0 \quad .$$

प्रायिकता गुणन नियम से $P(B\cap A)=P(A).P(\frac{B}{A}), P(A)\neq 0$

अत: A एंव B घटनाएँ स्वतंत्र घटनाएँ कहते है,यदि

$$P(A\cap B)=P(A).P(B), P(A)\neq 0, P(B)\neq 0$$

प्रतिदर्श समष्टि का विभाजन(Partition of a sample space):

घटनाओं E_1, E_2, -------, E_n के समुच्चय, प्रतिदर्श समष्टि S के विभाजन को निरूपित करता है यदि

(i) $E_i\cap E_j=\Phi, i\neq j, i, j=1,2,----,n$

(ii) $E_1\cup E_2\cup E_3\cup ----E_n=S$

(iii) $P(E_i)>0, i=1,2,----,n$

संपूर्ण प्रायिकता प्रमेय(Theorem of total probability):

“”माना कि घटनाओं E_1, E_2, -------, E_n के समुच्चय, प्रतिदर्श समष्टि S के विभाजन को निरूपित करता है, तथा A प्रतिदर्श समष्टि S के संगत एक घटना है, तो

$$P(A)=P(E_1).P(\frac{A}{E_1})+P(E_2).P(\frac{A}{E_2})+------------+P(E_n).P(\frac{A}{E_n})=\sum_{j=1}^{n}P(E_j).P(\frac{A}{E_j})$$

प्रमाण: $E_1\cup E_2\cup E_3\cup ----E_n=S$, $E_i\cap E_j=\Phi, i\neq j, i, j=1,2,----,n$

तथा A प्रतिदर्श समष्टि S के संगत एक घटना है, तो

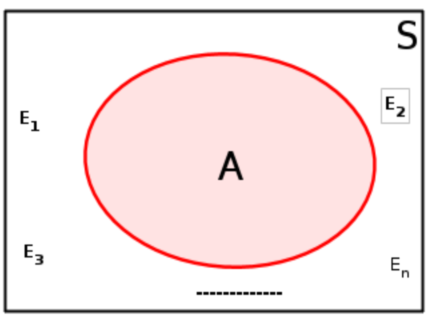
$$A=A\cap S=A\cap(E_1\cup E_2\cup ----E_n)=(A\cap E_1)\cup(A\cap E_2)\cup ------(A\cap E_n)$$

$$\Rightarrow A=(A\cap E_1)+(A\cap E_2)+------+(A\cap E_n)$$

$$\Rightarrow P(A)=P(A\cap E_1)+P(A\cap E_2)+------+P(A\cap E_n)$$

$$\Rightarrow P(A)=P(E_1).P(\frac{A}{E_1})+P(E_2).P(\frac{A}{E_2})+---+P(E_n).P(\frac{A}{E_n})$$

$$\Rightarrow P(A)=\sum_{j=1}^{n}P(E_j).P(\frac{A}{E_j})$$



बेज–प्रमेय(Baye's Theorem):

यदि E_1, E_2, -------, E_n अरिक्त घटनाएँ है जो प्रतिदर्श समष्टि S के विभाजन को निरूपित करता है, तथा A प्रतिदर्श समष्टि S के संगत एक घटना है, जिसकी प्रायिकता शून्येतर है तो

$$P(\frac{E_i}{A})=\frac{P(E_i).P(\frac{A}{E_i})}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j).P(\frac{A}{E_j})}, i=1,2,3,----------,n$$

प्रमाण:

$$P(\frac{E_i}{A})=\frac{P(A\cap E_i)}{p(A)}$$

$$\Rightarrow \quad P(\frac{E_i}{A})=\frac{P(E_i)P(\frac{A}{E_i})}{P(A)}$$

$$\Rightarrow \quad P(\frac{E_i}{A})=\frac{P(E_i)P(\frac{A}{E_i})}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j).P(\frac{A}{E_j})}$$

यादृच्छिक चर(Random variables):

यादृच्छिक चर X एक फलन होता है जिसका प्रान्त यादृच्छिक परीक्षण के परिणामों का समुच्चय अर्थात प्रतिदर्श समष्टि हांता है।

प्रायिकता बंटन(probability disribution):

माना कि एक यादृच्छिक चर X का वास्तविक मान x_1, x_2, x_3,------,x_nतथा इसके प्रत्येक मान के संगत प्रायिकता क्रमशः p_1, p_2, p_3, ---------------,p_n है, तो यादृच्छिक चर की प्रायिकता बंटन निम्न प्रकार होता है।

X	x_1	x_2	x_3	------	x_n
P(X)	p_1	p_2	p_3	------	p_n

यादृच्छिक चर का माध्य(Mean of a random variables):

माना कि एक यादृच्छिक चर X का वास्तविक मान x_1, x_2, x_3,------,x_nतथा इसके प्रत्येक मान के संगत प्रायिकता क्रमशः p_1, p_2, p_3, ---------------,p_n है। तो यादृच्छिक चर का माध्य

$\mu=\sum_{i=1}^{n} x_i.p_i$ होता है।

यादृच्छिक चर X के माध्य को प्रत्याशा E(X) भी कहते हैं।

अर्थात $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i.p_i$

यादृच्छिक चर का प्रसरण(Variance of a random variables):

माना कि एक यादृच्छिक चर X का वास्तविक मान x_1, x_2, x_3,------,x_n तथा इसके प्रत्येक मान के संगत प्रायिकता क्रमशः p_1, p_2, p_3, ---------------,p_n है। यादृच्छिक चर का माध्य μ है। X का प्रसरण जो कि Var (X) या $\sigma_x{}^2$ द्वारा निरूपित किया जाता है तो $\sigma_x{}^2 =$

$$Var(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.P(x_i)$$

तथा मानक विचलन = σ_x = $\sqrt{Var(X)}=\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.P(x_i))}$

यादृच्छिक चर के माध्य एंव प्रसरण में सम्बंध(Relation in mean and Variance of a random variables):

$$Var(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.P(x_i)$$

$$\Rightarrow \quad Var(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+\mu^2-2\mu x).P(x_i)$$

$$\Rightarrow \quad Var(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 P(x_i)+\mu^2\sum_{i=1}^{n}P(x_i)-2\mu\sum_{i=1}^{n}P(x_i)$$

$$\Rightarrow \quad Var(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 P(x_i)+\mu^2-2\mu^2$$

$$\Rightarrow \quad Var(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 P(x_i)-\mu^2$$

$$\Rightarrow \sigma_x{}^2 = \quad Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

बरनौली परीक्षण(Bernoulli trials):

एक यादृच्छिक प्रयोग के परीक्षणों को बरनौली परीक्षण कहते है यदि –

1. परीक्षणों की संख्या परिमित हो,
2. परीक्षण स्वतंत्र हो,
3. प्रत्येक परीक्षण के तथ्यतः दो ही परिणाम हो,
4. किसी परिणाम की प्रायिकता प्रत्येक परीक्षण में समान हो।

द्विपद बंटन(Binnomial distribution):

यदि एक प्रयोग में सफलता की प्रायिकता p तथा असफलता q है जिससे p+q=1, n स्वतंत्र परीक्षण किया जाता है,तो n परीक्षण में r बार सफलता की प्रायिकता $\overset{n}{\underset{r}{C}}p^r q^{n-r}$ है।

निम्न प्रायिकता बंटन द्विपद बंटन कहलाता है, यहॉ $P(x)=\overset{n}{\underset{r}{C}}p^r q^{n-r}$, r= 0, 1, 2, -----------, n ; q = 1- p, P(x) द्विपद बंटन का प्रायिकता फलन कहलाता है। द्विपद बंटन को B(n , p) से निरूपित करते है। द्विपद बंटन का माध्य =np तथा प्रसरण = npq होता है।

X	0	1	2	------	r	---	n
P(X)	${}^{n}C_{0}q^{n}$	${}^{n}C_{1}q^{n-1}p$	${}^{n}C_{2}q^{n-2}p^{2}$	------	${}^{n}C_{r}q^{n-r}p^{r}$	----	${}^{n}C_{n}p^{n}$

उदाहरण(Example)

उदाहरण 1: एक काले तथा एक लाल पासे को उछाला जाता है। पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग 9 से ज्यादा होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात करें यदि यह ज्ञात हो कि काले पासे पर 5 प्रकट हुआ है।

हल 1: दो पासे उछालने की दशा में कुल परिणामों की संख्या 36 होती है।

दो पासे उछालने की दशा में योग 9 से ज्यादा होने की घटना

A = {(4,6), (5,5), (5,6),(6,4), (6,5), (6,6)}

काले पासे पर 5 आने की घटना

B = {(5,1), (5,2), (5,3),(5,4), (5,5), (5,6)}

$\Rightarrow \quad A\cap B$ ={(5,5),(5,6)}

$$P(A\cap B)=\frac{2}{36} \quad , \quad P(B)=\frac{6}{36} \ .$$

$$\Rightarrow \quad P(\frac{A}{B})=\frac{P(A\cap B)}{p(B)}=\frac{(\frac{2}{36})}{(\frac{6}{36})}=\frac{1}{3}$$

उदाहरण 2 : यदि A तथा B दो स्वतंत्र घटनाएँ है तो सिद्ध किजिए :

$$(i)P(A\cap B^{'})=P(A)P(B)^{'}$$

$$(ii)P(A^{'}\cap B)=P(A^{'})P(B)$$

हल 2: (i) हम जानते है: $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

$$\Rightarrow \quad P(A\cap B^{'})=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow \quad P(A\cap B^{'})=P(A)=P(A)-P(A)P(B)$$

$$\Rightarrow \quad P(A\cap B^{'})=P(A)[1-P(B)]$$

$$\Rightarrow \quad P(A\cap B^{'})=P(A)P(B^{'})$$

यदि A तथा B दो स्वतंत्र घटनाएँ है तो A तथा $B^{'}$ भी स्वतंत्र घटनाएँ है।

(ii) $P(A^{'}\cap B)=P(B\cap A^{'})=P(B-A)$

$\Rightarrow \quad P(A' \cap B) = P(B) - P(B \cap A)$

$\Rightarrow \quad P(A' \cap B) = P(B) - P(B) P(A)$

$\Rightarrow \quad P(A' \cap B) = P(B)[1 - P(A)]$

$\Rightarrow \quad P(A' \cap B) = P(A') P(B)$

यदि A तथा B दो स्वतंत्र घटनाएँ है तो A' तथा B भी स्वतंत्र घटनाएँ है।

उदाहरण 3 : एक थैले में 4 लाल एंव 4 काली गेंदे है तथा एक अन्य थैले में 2 लाल एंव 6 काली गेंदे है। दोनों थैलों में से एक को यादृच्छया चुना जाता है तथा उनमें से एक गेंद निकाली जाती है जो कि लाल है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि गेंद पहले थैले से निकाली गई है।

हल 3: माना कि थैलों के चुनने की घटना क्रमशः E_1 तथा E_2 है और लाल रंग ही गेंद निकालने की घटना A है।

दो में से एक थैला चुनने की प्रायिकता = $\frac{1}{2}$

$i.e. P(E_1) = \frac{1}{2}, P(E_2) = \frac{1}{2}$

थैले I में 4 लाल एंव 4 काली गेंदे है।

थैले I से एक लाल गेंद चुनने की प्रायिकता = $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad P(\frac{A}{E_1}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

थैले II में 2 लाल एंव 6 काली गेंदे है।

थैले II से एक लाल गेंद चुनने की प्रायिकता = $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \quad P(\frac{A}{E_2}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

अब $P(\frac{E_1}{A}) = \dfrac{P(E_1).P(\frac{A}{E_1})}{P(E_1).P(\frac{A}{E_1}) + P(E_2).P(\frac{A}{E_2})}$

$$\Rightarrow \quad P(\frac{E_1}{A}) = \frac{(\frac{1}{2}.\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{4})}$$

$$\Rightarrow \quad P(\frac{E_1}{A}) = \frac{(\frac{1}{4})}{(\frac{3}{8})} = \frac{(1.4)}{(\frac{8}{3})} = \frac{2}{3}$$

उदाहरण 4 : 30 बल्बों के ढ़ेर से, जिसमें 6 बल्ब खराब है 4 बल्बों का एक नमूना यादृच्छया प्रतिस्थापना के साथ निकाला जाता है। खराब बल्बों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

हल 4: यहॉ 30 बल्बों के ढ़ेर में 6 बल्ब खराब है।

एक खराब बल्ब पाने की प्रायिकता = $\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$

एक खराब बल्ब पाने की प्रायिकता = $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

माना कि 4 खराब बल्ब के नमूने में खराब बल्बों की संख्या चर X है।

अब $P(X=0)=\frac{4}{5}x\frac{4}{5}x\frac{4}{5}x\frac{4}{5}=(\frac{4}{5})^4=\frac{256}{625}$,

$P(X=1)=\overset{4}{\underset{1}{C}}(\frac{4}{5})^3 x(\frac{1}{5})=\frac{256}{625}$,

$P(X=2)=\overset{4}{\underset{2}{C}}(\frac{4}{5})^2 x(\frac{1}{5})^2=\frac{96}{625}$,

$P(X=3)=\overset{4}{\underset{3}{C}}(\frac{4}{5})x(\frac{1}{5})^3=\frac{16}{625}$,

$P(X=4)=(\frac{1}{5})^4=\frac{1}{625}$.

अतः खराब बल्बों की संख्या का प्रायिकता बंटन निम्नवत है:

X	0	1	2	3	4
P(X)	$\frac{256}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$	$\frac{1}{625}$

उदाहरण 5 : एक कक्षा में 15 छात्र है जिनकी आयु 14, 17, 15, 14, 21, 17, 19, 20, 16, 18, 20, 17, 16, 19 तथा 20 वर्ष है। एक छात्र को इस प्रकार चुना गया कि प्रत्येक छात्र के चुने जाने की सम्भावना समान है तथा चुने गये छात्र की आयु (X)को लिखा गया। यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए। X का माध्य , प्रसरण तथा मानक विचलन भी ज्ञात करें।

हल 4: प्रत्येक छात्र के चुने जाने की प्रायिकता = $\frac{1}{15}$

X का प्रायिकता बंटन निम्नवत है:

X(वर्ष में)	14	15	16	17	18	19	20	21
संख्या	2	1	2	3	1	2	3	1
P(X)	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$

$P_i\, x_i$	$\frac{28}{15}$	$\frac{15}{15}$	$\frac{32}{15}$	$\frac{51}{15}$	$\frac{18}{15}$	$\frac{38}{15}$	$\frac{60}{15}$	$\frac{21}{15}$
$P_i\, x_i^{\,2}$	$\frac{392}{15}$	$\frac{225}{15}$	$\frac{512}{15}$	$\frac{867}{15}$	$\frac{324}{15}$	$\frac{722}{15}$	$\frac{1200}{15}$	$\frac{441}{15}$

$\Rightarrow$ माध्य = $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i . p_i=\frac{263}{15}=17.53$,

$\Rightarrow$ $E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2=\frac{4683}{15}=312.2$

अतः प्रसरण = $E(X^2) - [E(X)]^2 = 312.2 - (17.53)^2 = 4.78$

तथा मानक विचरण = $\sqrt{}$ (प्रसरण) = $\sqrt{4.78}=2.19$

============================

References: निम्न संदर्भों द्वारा संकलित एंव ICT कार्यो हेतु निःशुल्क प्रसारित–

1.विद्यालयी शिक्षा परिषद, उत्तराखण्ड द्वारा निर्धारित पाठ्यपुस्तक–गणित, कक्षा–12, अध्याय–13.

2- सहायक पाठ्य पुस्तक student advisor- डा0 आर0के0 श्रीवास्तव,S. P. institute of science & technology, Gorakhpur: गणित कक्षा–12, भाग–2, अध्याय–13.

3- सहायक पाठ्य पुस्तक Modern’s abc-सत्यदेव नारायण सिंहा,P.G. college समस्तीपुर, बिहार: गणित कक्षा–12, भाग–2, अध्याय–13.

4- Computer hardware – software.