

निर्देशांक ज्यामिति

कक्षा X

1. किसी बिन्दु की **y-अक्ष** तथा **x-अक्ष** से दूरी क्रमशः **भुज** और **कोटि** होती है।
2. **x-अक्ष** पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक **(x,0)** होते हैं।
3. **y-अक्ष** पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक **(0,y)** होते हैं।

दो बिन्दुओं के बीच की दूरी : – दो बिन्दुओं के बीच की दूरी उन दो बिन्दुओं को जोड़ने वाले रेखाखण्ड की लम्बाई होती है।

दो बिन्दुओं **P(x₁,y₁)** और **Q(x₂,y₂)** के बीच की दूरी है

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

या

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

इसे **दूरी सूत्र** कहते हैं।

प्रश्न : बिन्दु **P(-6,7)** और **Q(-1,-5)** के बीच की दूरी ज्ञात करो ?

हल : यहाँ $x_1 = -6, y_1 = 7$
 $x_2 = -1, y_2 = -5$

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\begin{aligned}
PQ &= \sqrt{(-1+6)^2+(-5-7)^2} \\
&= \sqrt{(5)^2+(-12)^2} \\
&= \sqrt{25+144} \\
&= \sqrt{169} \\
&= 13
\end{aligned}$$

महत्वपूर्ण बिन्दु :-

1. तीन बिन्दु समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष होंगे, यदि तीन दूरियों में से कोई दो दूरियाँ समान होंगी।
2. तीन बिन्दु त्रिभुज के शीर्ष होंगे यदि तीन दूरियों में से किन्ही दो दूरियों का योग तीसरी दूरी से अधिक हो।
3. तीन बिन्दु समकोण त्रिभुज के शीर्ष होंगे यदि तीन दूरियों में से किन्ही दो दूरियों के वर्गों का योग तीसरी दूरी के वर्ग के बराबर हो।
4. चार बिन्दु समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष होंगे, यदि चार दूरियों में से आमने-सामने की दूरियाँ समान हो परन्तु विकर्ण की लम्बाई समान न हो।
5. चार बिन्दु वर्ग के शीर्ष होंगे, यदि चारों दूरियाँ समान हो तथा विकर्ण भी समान हो।
6. तीन बिन्दु संरेखीय होंगे, यदि तीन दूरियों में से किन्ही दो दूरियों का योग तीसरी दूरी के समान हो।

प्रश्न : y अक्ष पर एक ऐसा बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं A(6,5) और B(-4,3) से समदूरस्थ हो ?

हल — माना y-अक्ष पर स्थित कोई बिन्दु (0,y) है,

अतः बिन्दु $P(0,y)$ बिन्दुओं $A(6,5)$ और $B(-4,3)$ से

समदूरस्थ है। तब

$$PA=PB$$

$$PA^2 = PB^2$$

$$(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$$

$$36+25+y^2-10y=16+9+y^2-6y$$

$$81-10y=25-6y$$

$$4y=36$$

$$y=9$$

अतः बिन्दु $(0,9)$ हैं।

विभाजन सूत्र :

दो बिन्दुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड AB को $m_1:m_2$ के अनुपात में आंतरिक रूप से विभाजित करने वाले बिन्दु $P(x, y)$ के निर्देशांक हैं –

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2} \right)$$

इसे विभाजन सूत्र कहते हैं।

नोट: यदि P रेखाखण्ड AB का मध्य बिन्दु है तो बिन्दु P के निर्देशांक

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \text{ होंगे।}$$

विभाजन सूत्र पर आधारित महत्वपूर्ण उदाहरणों के हल :

प्रश्न : बिन्दु $(-4, 6)$ बिन्दुओं $A(-6, 10)$ और $B(3, -8)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को किस अनुपात में विभाजित करता है ?

हल : माना बिन्दु $(-4,6)$ रेखाखण्ड AB को $K:1$ के अनुपात में विभाजित करता है,

विभाजन सूत्र से –

$$(-4,6) = \left(\frac{3K-6}{K+1}, \frac{-8K+10}{K+1} \right)$$

$$\text{अतः } -4 = \frac{3K-6}{K+1}$$

$$-4K-4 = 3K-6$$

$$7K = 2$$

$$K = 2/7$$

$$K : 1 = 2 : 7$$

अतः बिन्दु $(-4, 6)$ बिन्दुओं A $(-6, 10)$ और B $(3, -8)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को $2:7$ के अनुपात में विभाजित करता है।

प्रश्न : बिन्दुओं A $(2,-2)$ और B $(-7, 4)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को सम त्रिभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ?

हल :

माना रेखाखण्ड AB

A——P——Q——B

को समत्रिभाजित करने वाले बिन्दु P और Q हैं,

$$\text{अर्थात् } AP = PQ = QB$$

अतः P रेखाखण्ड AB को $1:2$ के अनुपात में विभाजित करता है। अतः P के निर्देशांक हैं :

$$\left(\frac{1 \cdot -7 + 2 \cdot 2}{1+2}, \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot -2}{1+2} \right)$$

$$= \left(\frac{-7+4}{3}, \frac{4-4}{3} \right)$$

$$= (-1, 0)$$

अतः Q रेखा खण्ड AB को 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है। अतः Q के निर्देशांक हैं :

$$\left(\frac{2 \cdot -7 + 1 \cdot 2}{2+1}, \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot -2}{2+1} \right)$$

$$= \left(\frac{-14+2}{3}, \frac{8-2}{3} \right)$$

$$= (-4, 2)$$

अतः बिन्दु A और B को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को समत्रिभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक (-1, 0) और (-4, 2) हैं।

प्रश्न : यदि बिन्दु A(6,1), B(8,2), C(9,4) और D(P,3) एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष इसी क्रम में हों तो P का मान ज्ञात कीजिए ?

हल: चूँकि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं ...

अतः विकर्ण AC के मध्यबिन्दु के निर्देशांक = विकर्ण BD के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

मध्य बिन्दु सूत्र से-

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$\text{अर्थात् } \left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2} \right) = \left(\frac{8+P}{2}, \frac{2+3}{2} \right)$$

$$\text{या } \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2} \right) = \left(\frac{8+P}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

तुलना करने पर

$$\frac{15}{2} = \frac{8+P}{2}$$

$$15 = 8+P$$

$$P=15-8$$

$$P=7$$

त्रिभुज का क्षेत्रफल :-

बिन्दुओं $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ और (x_3, y_3) से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} | x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) |$$

$$\text{या } \frac{1}{2} | (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2) |$$

Note : यदि बिन्दु $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ संरेखीय हैं तो त्रिभुज का क्षेत्रफल 0 होगा।

$$\text{अर्थात् } x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$$

त्रिभुज का क्षेत्रफल सदैव **धनात्मक** होता है। इस लिए त्रिभुज के क्षेत्रफल का संख्यात्मक मान लिया जाता है।

महत्वपूर्ण प्रश्नों के हल :

प्रश्न : K का मान ज्ञात कीजिए यदि बिन्दु $A(2,3), B(4,K)$ और $C(6,-3)$ संरेखीय हैं ?

हल : चूँकि तीनों बिन्दु संरेखीय हैं इस लिए त्रिभुज का क्षेत्रफल 0 होगा।

अर्थात् :

$$= \frac{1}{2} | x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2) |$$

$$\frac{1}{2} | 2(K+3)+4(-3-3)+6(3-K) | = 0$$

$$\text{या } 2K+6-24+18-6K=0$$

$$\text{या } -4K+24-24=0$$

$$\text{या } -4K=0$$

$$\text{या } K=0$$

अतः K का मान 0 है।

प्रश्न : यदि **A(-5,7), B(-4,-5), C(-1,-6)** और **D(4,5)** एक चतुर्भुज **ABCD** के शीर्ष हैं तो इस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :

चतुर्भुज ABCD में B और D को मिलाने पर त्रिभुज ABD तथा त्रिभुज BCD प्राप्त होते हैं अतः

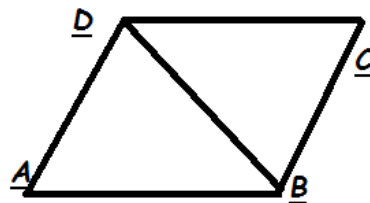
त्रिभुज ABD का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} | x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2) |$$

$$= \frac{1}{2} | -5(-5-5) + (-4)(5-7) + 4(7+5) |$$

$$= \frac{1}{2} | -5(-10) - 4(-2) + 4(12) |$$

$$= \frac{1}{2} | 50 + 8 + 48 |$$



$$= \frac{106}{2} = 53 \text{ वर्ग मात्रक}$$

त्रिभुज BCD का क्षेत्रफल =

$$= \frac{1}{2} | x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2) |$$

$$= \frac{1}{2} | -4(-6-5) -1(5+5) +4(-5+6) |$$

$$= \frac{1}{2} | -4(-11) -1(10) +4(1) |$$

$$= \frac{1}{2} | 44 -10 +4 |$$

$$= \frac{1}{2} | 38 |$$

$$= 19 \text{ वर्ग मात्रक}$$

अतः चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $53+19 = 72$ वर्ग मात्रक

References : निम्न संदर्भों द्वारा संकलित एवं ICT कार्यो हेतु निःशुल्क प्रसारित –
1–विद्यालया शिक्षा परिषद, उत्तराखण्ड द्वारा निर्धारित पाठ्यपुस्तक एवं अन्य –
गणित, कक्षा–10, अध्याय–7
2–computer hardware – software.

Made By- Mukesh Upadhyaya, LT MATHS

K.N.U.G.M.I.C.PITHORAGARH