



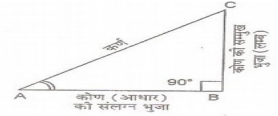
## त्रिकोणमिति का परिचय **(Introduction of Trigonometry)**

**LALIT MOHAN JOSHI, AT LT,  
SKS GIC PATTHARKHANI,  
PITHORAGARH**

त्रिकोणमिति में एक त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के बीच के संबंधों का अध्ययन किया जाता है।

### **पाइथागोरस प्रमेय (Pythagoras Theorem)–**

किसी समकोण त्रिभुज ABC में न्यूनकोण  $\angle A$  के लिए उसके सामने की भुजा BC को



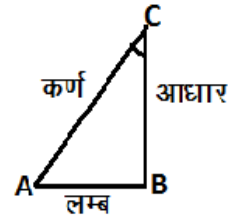
लम्ब या ऊँचाई कहते हैं,  $\angle A$  से लगी भुजा AB को आधार तथा तिरछी भुजा AC को कर्ण कहते हैं।

इसी प्रकार न्यूनकोण  $\angle C$  के लिए उसके सामने की भुजा AB को लम्ब या ऊँचाई कहते हैं,  $\angle C$  से लगी भुजा BC को आधार तथा तिरछी भुजा AC को कर्ण कहते हैं।

पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार, किसी समकोण त्रिभुज में

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$$

$$\text{कर्ण} = \sqrt{(\text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2)}$$

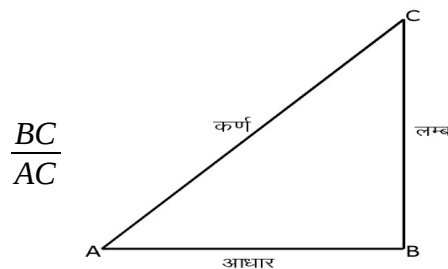


इस प्रमेय की सहायता से किसी समकोण त्रिभुज की दो भुजायें ज्ञात होने पर तीसरा भुजा को ज्ञात किया जा सकता है।

### **त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometrical Ratios) –**

एक समकोण त्रिभुज में किसी न्यूनकोण के लिए भुजाओं के अनुपात को त्रिकोणमितीय अनुपात कहते हैं। ये छः प्रकार के होते हैं;

समकोण त्रिभुज ABC में  $\angle B$  समकोण तथा न्यूनकोण  $\angle A$  के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात निम्न प्रकार से परिभाषित किए जाते हैं:–



1.  $\sin A$  (साइन ए) = (लम्ब/कर्ण) =

2.  $\cos A$  (कौस ए) = (आधार/कर्ण) =  $\frac{AB}{AC}$

3.  $\tan A$  (टैन ए) = (लम्ब/आधार) =  $\frac{BC}{AB}$
4.  $\operatorname{cosec} A$  (कौसेक ए) =  $\frac{1}{\sin A} = (\text{कर्ण}/\text{लम्ब}) = \frac{AC}{BC}$
5.  $\sec A$  (सैक ए) =  $\frac{1}{\cos A} = (\text{कर्ण}/\text{आधार}) = \frac{AC}{AB}$
6.  $\cot A$  (कौट ए) =  $\frac{1}{\tan A} = (\text{आधार}/\text{लम्ब}) = \frac{AB}{BC}$

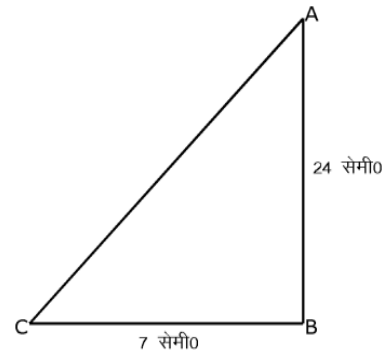
**महत्वपूर्ण:**

1.  $\operatorname{cosec} A$ ,  $\sin A$  का व  $\sec A$ ,  $\cos A$  का और  $\cot A$ ,  $\tan A$  का व्युत्क्रम (उल्टा) है।
2.  $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ ,  $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$
3.  $\sin A$ ,  $\sin$  और  $A$  का गुणनफल नहीं है बल्कि  $\angle A$  के लिए  $\sin$  का मान है
4.  $\sin$  को sine का,  $\cos$  को cosine का,  $\tan$  को tangent का,  $\operatorname{cosec}$  को cosecant का,  $\sec$  को secant का व  $\cot$  को cotangent का संक्षिप्त रूप कहा जाता है।

**उदाहरण:-**

1. त्रिभुज  $ABC$  में, जिसका  $\angle B$  समकोण है तथा  $AB = 24$  सेमी,  $BC = 7$  सेमी है तो  $\angle C$  के लिए समस्त त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करो।

हल: सर्वप्रथम पाइथागोरस प्रमेय की सहायता से त्रिभुज  $ABC$  का कर्ण ज्ञात करते हैं:



$\angle C$  के लिए, लम्ब = 24 सेमी व आधार = 7 सेमी

$$\therefore \text{कर्ण} = \sqrt{(\text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2)}$$

$$\text{कर्ण} = \sqrt{(24^2 + 7^2)}$$

$$= \sqrt{(576 + 49)}$$

$$= \sqrt{625}$$

$$= 25 \text{ सेमी}$$

∠C के लिए समस्त त्रिकोणमितीय अनुपात :-

$$\sin C = (\text{लम्ब/कर्ण}) = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$$

$$\cos C = (\text{आधार/कर्ण}) = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$$

$$\tan C = (\text{लम्ब/आधार}) = \frac{AB}{BC} = \frac{24}{7}$$

$$\operatorname{cosec} C = \frac{1}{\sin C} = (\text{कर्ण/लम्ब}) = \frac{AC}{AB} = \frac{25}{24}$$

$$\sec C = \frac{1}{\cos C} = (\text{कर्ण/आधार}) = \frac{AC}{BC} = \frac{25}{7}$$

$$\cot C = \frac{1}{\tan C} = (\text{आधार/लम्ब}) = \frac{BC}{AB} = \frac{7}{24}$$

2. यदि  $\tan A = \frac{4}{3}$  तो  $\sin A$  व  $\cos A$  का मान ज्ञात करो।

हल:  $\tan A = (\text{लम्ब/आधार})$  और दिया है  $\tan A = \frac{4}{3}$

$$\therefore \tan A = (\text{लम्ब/आधार}) = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \text{लम्ब} = 4 \text{ व आधार} = 3$$

पाइथागोरस प्रमेय से, कर्ण =  $\sqrt{(\text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2)}$

$$\text{कर्ण} = \sqrt{(4^2 + 3^2)}$$

$$= \sqrt{(16 + 9)}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$= 5$$

$$\therefore \sin A = (\text{लम्ब/कर्ण}) = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = (\text{आधार/कर्ण}) = \frac{3}{5}$$

**कुछ विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometrical Ratios of Some Specific Angles)** अनुपातों के मान निम्नलिखित सारणी से प्राप्त किए जा सकते हैं:-

$\angle A$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	अपरिभाषित
cosec A	अपरिभाषित	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	अपरिभाषित
cot A	अपरिभाषित	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

यदि  $\angle A = 0^\circ$  तो  $\sin A = \sin 0^\circ = 0$ ,  $\cos A = \cos 0^\circ = 1$ ,  $\tan A = \tan 0^\circ = 0$

यदि  $\angle A = 30^\circ$  तो  $\sin A = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\cos A = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\tan A = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

इसी प्रकार सभी कोणों के लिए अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान लिखे जा सकते हैं।

**उदाहरण:-**

1.  $\sin 60^\circ \sec 30^\circ \tan 45^\circ$  का मान ज्ञात करो।

हल:  $\sin 60^\circ \sec 30^\circ \tan 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times 1 = 1$  (त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान रखने पर)

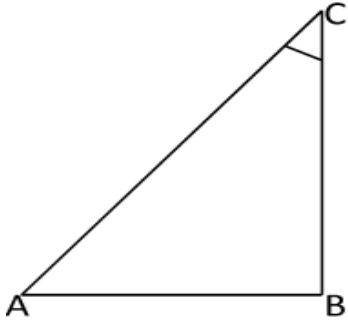
2-  $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$  का मान ज्ञात करो।

हल:  $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ = 2 \times (1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$$= 2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 2$$

### पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometrical Ratios of Complementary Angles)

यदि दो कोणों का योग  $90^\circ$  है तो वे दोनों कोण एक दूसरे के पूरक कहलाते हैं।



समकोण त्रिभुज ABC में, जिसका  $\angle B$  समकोण है,  $\angle A + \angle C = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle C = 90^\circ - \angle A \text{ अर्थात् } \angle A \text{ व } \angle C \text{ एक दूसरे के पूरक हैं।}$$

$\angle A$  के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात:

$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{BC}{AC}, \quad \cos A = \frac{AB}{AC}, \quad \tan A = \frac{BC}{AB} \\ \operatorname{cosec} A &= \frac{AC}{BC}, \quad \sec A = \frac{AC}{AB}, \quad \cot A = \frac{AB}{BC} \end{aligned}$$

$\angle C = (90^\circ - \angle A)$  के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात:

$$\sin C = \sin (90^\circ - \angle A) = \frac{AB}{AC}, \quad \cos C = \cos (90^\circ - \angle A) = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan C = \tan (90^\circ - \angle A) = \frac{AB}{BC}, \quad \operatorname{cosec} C = \operatorname{cosec} (90^\circ - \angle A) =$$

$$\frac{AC}{AB}$$

$$\sec C = \sec (90^\circ - \angle A) = \frac{AC}{BC}, \quad \cot C = \cot (90^\circ - \angle A) = \frac{BC}{AB}$$

$\angle A$  व  $\angle C = (90^\circ - \angle A)$  के त्रिकोणमितीय अनुपातों की तुलना करने पर,

$$\sin (90^\circ - \angle A) = \cos A, \quad \cos (90^\circ - \angle A) = \sin A$$

$$\tan (90^\circ - \angle A) = \cot A, \quad \cot (90^\circ - \angle A) = \tan A$$

$$\sec (90^\circ - \angle A) = \operatorname{cosec} A, \quad \operatorname{cosec} (90^\circ - \angle A) = \sec A$$

**उदाहरण:-**

1.  $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ$  का मान ज्ञात करो।

हल:  $\therefore 48^\circ = 90^\circ - 42^\circ$

$\cos 48^\circ = \cos (90^\circ - 42^\circ) = \sin 42^\circ$  {  $\therefore \cos (90^\circ - \angle A) = \sin A$  }

$\therefore \cos 48^\circ - \sin 42^\circ = \sin 42^\circ - \sin 42^\circ = 0$

2.  $\frac{\tan 26}{\cot 64}$  का मान ज्ञात करो।

हल:  $\therefore 26^\circ = 90^\circ - 64^\circ$

$\tan 26^\circ = \tan (90^\circ - 64^\circ) = \cot 64^\circ$  {  $\therefore \tan (90^\circ - \angle A) = \cot A$  }

$\therefore \frac{\tan 26}{\cot 64} = \frac{\cot 64}{\cot 64} = 1$

**त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ (Trigonometrical Identities)–** (परीक्षा के लिए महत्वपूर्ण)

मुख्यतः तीन सर्वसमिकाएँ हैं जिनका उपयोग प्रश्नों को हल करने में किया जाएगा–

सर्वसमिका 1.  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

या,  $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$       या,  $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$

सर्वसमिका 2.  $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$

या,  $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$       या,  $\sec^2 A - 1 = \tan^2 A$

सर्वसमिका 3.  $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$

या,  $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$       या,  $\operatorname{cosec}^2 A - 1 = \cot^2 A$

**उदाहरण:–**

1. सिद्ध कीजिए :  $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

हल:  $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} \times \sqrt{\frac{1+\sin A}{1+\sin A}}$  {अंश व हर को  $\sqrt{1+\sin A}$  से गुणा करने पर}

$= \sqrt{\frac{[1+\sin A]^2}{1-\sin^2 A}} = \sqrt{\frac{[1+\sin A]^2}{\cos^2 A}}$  {  $\therefore 1 - \sin^2 A = \cos^2 A$  }

$= \frac{1+\sin A}{\cos A} = \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A} = \sec A + \tan A$

2. सिद्ध कीजिए :  $\frac{1+\cos A}{\sin A} + \frac{\sin A}{1+\cos A} = 2 \operatorname{cosec} A$

$$\begin{aligned} \text{हल: } \frac{1+\cos A}{\sin A} + \frac{\sin A}{1+\cos A} &= \frac{[1+\cos A]^2 + \sin^2 A}{\sin A [1+\cos A]} = \frac{1+2\cos A + \cos^2 A + \sin^2 A}{\sin A [1+\cos A]} \\ &= \frac{1+2\cos A + 1}{\sin A [1+\cos A]} = \frac{2+2\cos A}{\sin A [1+\cos A]} \\ &= \frac{2[1+\cos A]}{\sin A [1+\cos A]} = 2 \operatorname{cosec} A \end{aligned}$$

अभ्यास प्रश्न:

1. बिना त्रिकोणमितीय सारणी का प्रयोग किए  $\frac{\tan 65^\circ}{\cot 25^\circ}$  का मान ज्ञात करो। (2014)

2- सिद्ध कीजिए :  $\frac{1+\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{1+\sin A} = 2 \sec A$  (2014)

3.  $2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ$  का मान ज्ञात करो। (2011)

4- सिद्ध कीजिए :  $\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}} = \operatorname{cosec} A + \cot A$  (2010)

5.

$$\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = (\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)^2 \quad (2015)$$

6.

मान ज्ञात कीजिए :  $\frac{\sin^2 63^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ}$   
Evaluate : (2015)

7.

यदि  $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$ ;  $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$ ;  $0^\circ < A + B \leq 90^\circ$ ,  $A > B$ , तो A और B के मान ज्ञात कीजिए। (2014)

**References:** निम्न संदर्भों द्वारा संकलित एवं ICT कार्यो हेतु निःशुल्क प्रसारित—

1. विद्यालयी शिक्षा परिषद, उत्तराखण्ड द्वारा निर्धारित पाठ्यपुस्तक—गणित, कक्षा—10, अध्याय—8,

2. Computer hardware- software.