[Class XI, Subject-Mathematics, Chapter – 3]

त्रिकोणमितीय फलन
Trigonometic Functions

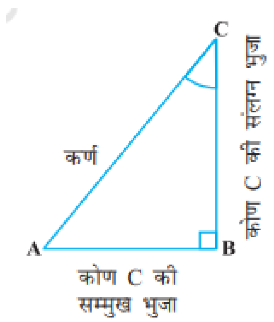
Prepared By -
Mr. Govind Ballabh Pant
Lecturer Maths
TRSB GIC Kamleshwar
Pithoragarh

"There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as trigonometry."
(संभवतः त्रिकोणमिति के अतिरिक्त गणित की कोई ऐसी शाखा नहीं है जो उसकी मध्य स्थिति का स्थान ले सके)
J F Herbart (1890)

अंग्रेजी शब्द "Trigonometry" की व्युत्पत्ति ग्रीक शब्दों "tri" (जिसका अर्थ है तीन), "gon" (जिसका अर्थ है, भुजा) और "metron" (जिसका अर्थ है माप) से हुई है वस्तुतः त्रिकोणमिति में एक त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के बीच के संबंधों का अध्धयन किया जाता है

समकोण त्रिभुज की भुजाओं के बीच का अनुपात, न्यून कोण के सापेक्ष, त्रिकोणमितीय अनुपात कहलाता है

जिस कोण के लिए त्रिकोणमिति अनुपातों का मान ज्ञात करना होता है | उसके सामने की भुजा लम्ब होती है . समकोण के सामने की भुजा कर्ण तथा तीसरी भुजा आधार होती है |



जहाँ AB = लम्ब, BC = आधार

कोण (Angle) : - जब कोई किरण अपने प्रारम्भिक स्थिर बिंदु के परितः घूमती है तो उसकी प्रारंभिक और अंतिम अवस्थाओं के बीच के घुमाव को कोण कहते हैं |

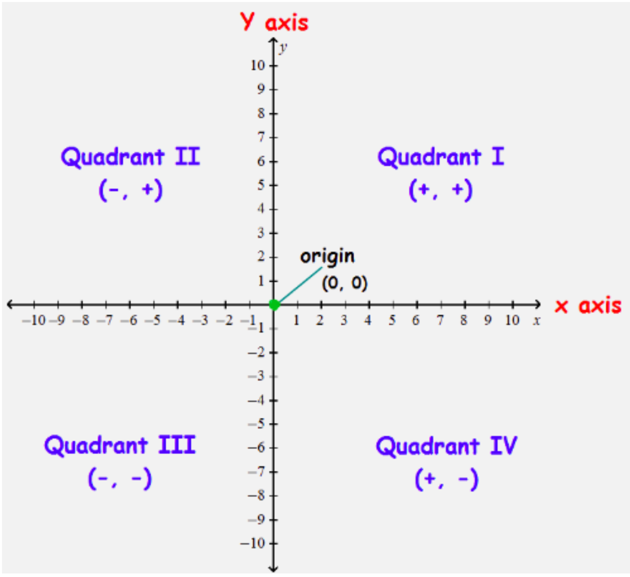
कोण

धनात्मक कोण | ऋणात्मक कोण

जब प्रारंभिक भुजा घड़ी की सुई की दिशा के विपरीत (anticlockwise) घूमती है, तो **धनात्मक कोण** बनता है

जब प्रारंभिक भुजा घड़ी की सुई की दिशा में (clockwise) घूमती है, तो **ऋणात्मक कोण** बनता है

चतुर्थांश (Quadrant) - दो परस्पर लंबवत रेखाएं किसी तल को चार भागों में बांटती है उन्हें चतुर्थांश कहते हैं



किसी चतुर्थांश में बिंदु की स्थिति :-

1. प्रथम चतुर्थांश में स्थित किसी बिंदु के लिए X निर्देशांक और Y निर्देशांक सदैव धनात्मक होते हैं
2. द्वितीय चतुर्थांश में स्थित किसी बिंदु के लिए X निर्देशांक ऋणात्मक और Y निर्देशांक धनात्मक होता है
3. तृतीय चौरठांश में स्थित किसी बिंदु के लिए X निर्देशांक व Y निर्देशांक दोनों ऋणात्मक होते हैं
4. चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित किसी बिंदु के लिए X निर्देशांक धनात्मक और Y निर्देशांक ऋणात्मक होता है
5. मूल बिंदु के लिए X व Y दोनों शून्य होते हैं
6. X-अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के लिए Y निर्देशांक शून्य होता है
7. Y-अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के लिए x निर्देशांक शून्य होता है

कोण के मापन की पद्धतियाँ एवं उनके सम्बन्ध :-

1. षष्टिक पद्धति :- इस पद्धति में एक समकोण को 90 बराबर भागों में बांटा जाता है जिसे डिग्री कहते हैं 1 डिग्री को 60 बराबर भागों में बांटा जाता है प्रत्येक भाग 1 मिनट कहलाता है 1 मिनट को 60 भागों में बांटा जाता है प्रत्येक भाग 1 सेकंड कहलाता है

एक डिग्री = $1°$
1 समकोण = $90°$
$1°$ = 60 मिनट या $60'$
$1'$ = 60 सेकंड या $60''$

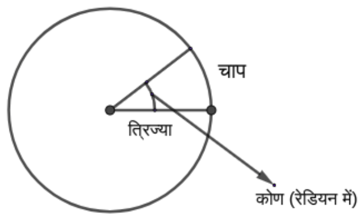
अर्थात समकोण का विभाजन डिग्री में, डिग्री का विभाजन मिनट में, मिनट का विभाजन सेकंड में होता है

2. शंताशक या फ्रेंच पद्धति - इस पद्धति में समकोण को 100 बराबर भागों में बांटा जाता है जिन्हे ग्रेड कहते हैं
1 समकोण = 100 ग्रेड (100^g)
1^g = 100 फ्रेंच मिनट (100')
1' = 100 फ्रेंच सेकंड (100")

3. वृतीय पद्धति (Circular System) - इस पद्धति में कोण मापन की इकाई रेडियन (Radian) है 1 रेडियन को 1^c लिखते हैं

प्रमेय - किसी चाप द्वारा वृत्त के केंद्र पर निर्मित कोण का वृत्तीय मापन (रेडियन) चाप / त्रिज्या के बराबर होता है

कोण = चाप / त्रिज्या



$\theta = s / r$, (θ सदैव रेडियन में होगा)

नोट - 1. अब अगर चाप और त्रिज्या की value (मान) दी गयी हो तो हम रेडियन में कोण का मान निकाल सकते हैं
2. किसी वृत्त की त्रिज्या जब एक पूर्ण परिक्रमा करती है तब वह वृत्त के केंद्र पर 2π रेडियन कोण अंतरित करती है
$\theta = s / r$,
$\theta = 2\pi r / r = 2\pi$ radian
अतः $360° = 2\pi$ radian
$180° = \pi$ radian

डिग्री (D) तथा रेडियन (R) में सम्बन्ध

$D / 90° = 2R / \pi$
जहाँ D = कोण का मान डिग्री में
R = कोण का मान रेडियन में

$D = 2 * 90° * R / \pi$
$D = 180° * R / \pi$
या $R = D * \pi / 180$

यानी रेडियन को डिग्री में बदलने के लिए रेडियन माप को $180 / \pi$ से गुणा करते हैं

उदाहरण

उदाहरण 1) 30 डिग्री को रेडियन में बदलिए
Sol - हम जानते हैं $R = D * \pi / 180$
$R = 30 * \pi / 180 = \pi / 6$ radian

उदाहरण 2) 50° 20' को रेडियन माप में बदलिए

Sol - सबसे पहले दिए गए माप को पूर्ण डिग्री में बदलें

20' = 20 * 1/60 = (1/3)°

50° 20' = (50+(1/3))° = (151/3)°

पुनः R = D * π / 180

R = (151/3) * π / 180 radian

R = 151 π / 540 radian

उदाहरण 3) -47° 30' को रेडियन माप में बदलिए

Sol - सबसे पहले दिए गए माप को पूर्ण डिग्री में बदलिए,

30' = (1/2)°

-47° 30' = - (47 + (1/2))° = -(95/2)°

R = -(95/2) * π / 180

R = - (19π / 72) radian

उदाहरण 4) - वृत्त का एक चाप जिसकी लम्बाई 24 cm है, वृत्त के केंद्र पर 60 अंश का कोण बनाता है, वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करो

Sol - θ (रेडियन में) = s / r

दिया है, चाप की लम्बाई = 24 cm

कोण θ = 60°

कोण रेडियन में = 60 * π / 180 = π / 3 radian

अतः π / 3 = 24 / r

=> r = 24 * 3 / π cm

=> r = 72 * 7 / 22 cm

=> r = 22.90 cm

कुछ महत्वपूर्ण त्रिकोणमितिय सूत्र

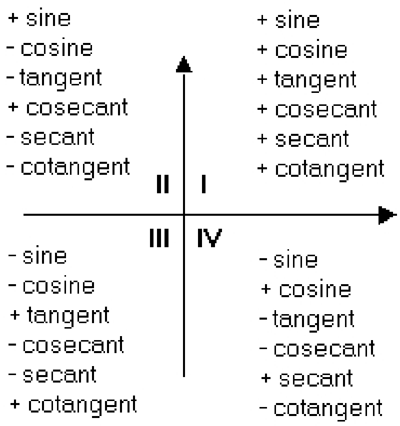
1. SinA = P / H
2. CosA = B / H
3. TanA = P / B
4. CotA = B / P
5. CosecA = H / P
6. SecA = H/B

1. TanA = SinA / CosA
2. CotA = CosA / SinA
3. CosecA = 1 / SinA
4. SecA = 1 / CosA

1. $\sin^2A + \cos^2A = 1$
2. $1 + \tan^2A = \sec^2A$
3. $1 + \cot^2A = \text{cosec}^2A$

जहाँ A = कोण , P = लम्ब , B = आधार, H = कर्ण

चतुर्थांशों में त्रिकोणमितीय अनुपातों के चिन्ह



1) $\sin(-x) = -\sin x$
2) $\cos(-x) = \cos x$
3) $\tan(-x) = -\tan x$
4) $\cot(-x) = -\cot x$
5) $\operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec} x$
6) $\sec(-x) = \sec x$

1) $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$
2) $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$
3) $\tan(\pi/2 - x) = \cot x$
4) $\cot(\pi/2 - x) = \tan x$
5) $\sec(\pi/2 - x) = \operatorname{cosec} x$
6) $\operatorname{cosec}(\pi/2 - x) = \sec x$

1) $\sin(\pi/2 + x) = \cos x$
2) $\cos(\pi/2 + x) = -\sin x$
3) $\tan(\pi/2 + x) = -\cot x$
4) $\cot(\pi/2 + x) = -\tan x$
5) $\sec(\pi/2 + x) = -\operatorname{cosec} x$
6) $\operatorname{cosec}(\pi/2 + x) = \sec x$

1) $\sin(\pi - x) = \sin x$
2) $\cos(\pi - x) = -\cos x$
3) $\tan(\pi - x) = -\tan x$
4) $\cot(\pi - x) = -\cot x$
5) $\sec(\pi - x) = -\sec x$
6) $\operatorname{cosec}(\pi - x) = \operatorname{cosec} x$

1) $\sin(\pi + x) = -\sin x$
2) $\cos(\pi + x) = -\cos x$
3) $\tan(\pi + x) = \tan x$
4) $\cot(\pi + x) = \cot x$
5) $\sec(\pi + x) = -\sec x$
6) $\operatorname{cosec}(\pi + x) = -\operatorname{cosec} x$

1) $\sin(2n\pi + x) = \sin x$	1) $\sin(2n\pi - x) = \sin(-x) = -\sin x$
2) $\cos(2n\pi + x) = \cos x$	2) $\cos(2n\pi - x) = \cos(-x) = \cos x$
3) $\tan(2n\pi + x) = \tan x$	3) $\tan(2n\pi - x) = \tan(-x) = -\tan x$
4) $\cot(2n\pi + x) = \cot x$	4) $\cot(2n\pi - x) = \cot(-x) = -\cot x$
5) $\operatorname{cosec}(2n\pi + x) = \operatorname{cosec} x$	5) $\operatorname{cosec}(2n\pi - x) = \operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec} x$
6) $\sec(2n\pi + x) = \sec x$	6) $\sec(2n\pi - x) = \sec(-x) = \sec x$

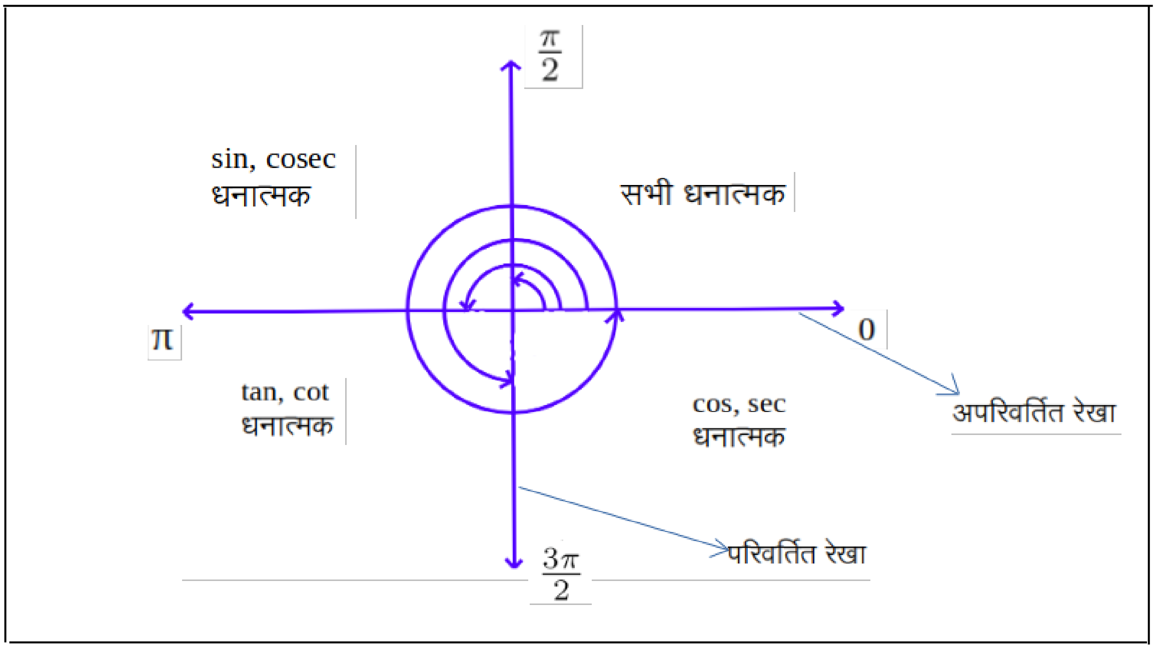
जहाँ x = कोण

अर्थात,

त्रिकोणमिति अनुपात (सम π + x) = त्रिकोणमिति अनुपात x

और त्रिकोणमिति अनुपात (सम π - x) = त्रिकोणमिति अनुपात (- x)

TRICK -



परिवर्तन (प्रतिवर्ती रेखा पार करने पर)

- sin x ---> cos x
- cos x ---> sin x
- tan x ---> cot x
- cot x ---> tan x
- sec x ---> cosec x
- cosec x ---> sec x

नियम -> **1.** चिन्ह देखो **2.** परिवर्तन देखो

दो कोणों के योग और अंतर से सम्बंधित सर्वसमिकाएँ

$\sin(A+B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$

$\sin(A-B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B$

$\cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$

$\cos(A-B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$

$\tan(A+B) = \tan A + \tan B / 1 - \tan A \cdot \tan B$

$\tan(A-B) = \tan A - \tan B / 1 + \tan A \cdot \tan B$

$\sin(A+B) \cdot \sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A$

$\cos(A+B) \cdot \cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$

$\sin 2A = 2 \cdot \sin A \cdot \cos A = 2 \cdot \tan A / (1 + \tan^2 A)$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = (1 - \tan^2 A) / (1 + \tan^2 A)$

$\tan 2A = 2\tan A / (1 - \tan^2 A)$

$\sin 3A = 3 \cdot \sin A - 4 \cdot \sin^3 A$

$\cos 3A = 4 \cdot \cos^3 A - 3 \cdot \cos A$

$\tan 3A = (3\tan A - \tan^3 A) / (1 - 3\tan^2 A)$

$\sin A + \sin B = 2 \sin (A+B)/2 \cos (A-B)/2$

$\sin A - \sin B = 2 \sin (A-B)/2 \cos (A+B)/2$

$\cos A + \cos B = 2 \cos (A-B)/2 \cos (A+B)/2$

$\cos A - \cos B = 2 \sin (B-A)/2 \sin (A+B)/2$

$\tan A + \tan B = \sin(A+B) / \cos A \cdot \cos B$

$2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

$2 \cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

$2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

$2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

उदाहरण

उदाहरण 1 - अन्य पांच त्रिकोणमितीय फलनों का मान ज्ञात कीजिये

$\sec x = \frac{13}{5}, x$ चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है।

उत्तर

$\sec x = \frac{13}{5} \Rightarrow \cos x = \frac{5}{13}$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$

इसलिए, $\sin x = -\frac{12}{13}$ [$\because$ x चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है और चतुर्थ चतुर्थांश में sin ऋणात्मक होता है]

$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = -\frac{13}{12}$ [$\because$ x चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है और चतुर्थ चतुर्थांश में cosec ऋणात्मक होता है]

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}$ [$\because$ x चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है और चतुर्थ चतुर्थांश में tan ऋणात्मक होता है]

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}$ [$\because$ x चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है और चतुर्थ चतुर्थांश में cot ऋणात्मक होता है]

उदाहरण 2 - मान ज्ञात कीजिये

$\cot\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$

उत्तर

$\cot\left(-\frac{15\pi}{4}\right) = -\cot\left(\frac{15\pi}{4}\right)$ [$\because$ चतुर्थ चतुर्थांश में cot ऋणात्मक होता है]

$= -\cot\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$-[-cot\ \frac{\pi}{4}]$ [$\because$ चतुर्थ चतुर्थांश में cot ऋणात्मक होता है]

$= cot\frac{\pi}{4}$

$= 1$

उदाहरण 3 - मान ज्ञात कीजिये

$cosec\ (-1410°)$

उत्तर

$cosec\ (-1410°) = -cosec\ (1410°)$ [$\because$ चतुर्थ चतुर्थांश में cosec ऋणात्मक होता है]

$= -cosec(4 \times 360° - 30°)$

$-[-cosec\ 30°]$ [$\because$ चतुर्थ चतुर्थांश में cosec ऋणात्मक होता है]

$= \operatorname{cosec} 30°$

$= 2$

उदाहरण 4

सिद्ध कीजिए: $\dfrac{\cos(\pi+x)\cos(-x)}{\sin(\pi-x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = cot^2 x$

उत्तर

बायाँ पक्ष $= \dfrac{\cos(\pi+x)\cos(-x)}{\sin(\pi-x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$

$= \dfrac{-\cos x\cos x}{\sin(\pi-x)(-\sin x)}$ [$\because$ दूसरे और तीसरे चतुर्थांश में cos ऋणात्मक होता परन्तु चतुर्थ में धनात्मक होता है]

$= \dfrac{-\cos x\cos x}{\sin x(-\sin x)}$ [$\because$ दूसरे चतुर्थांश में sin धनात्मक होता है]

$= \dfrac{-\cos^2 x}{-\sin^2 x} = \cot^2 x =$ दायाँ पक्ष

उदाहरण 5

मान ज्ञात कीजिए: **(i)** $\sin 75°$ **(ii)** $\tan 15°$

उत्तर

(i) $\sin 75° = \sin(45° + 30°)$

$= \sin 45°\cos 30° + \cos 45°\sin 30°$ [$\because \sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$]

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$

(ii) $\tan 15° = \tan(45° - 30°)$

$= \dfrac{\tan 45° - \tan 30°}{1 + \tan 45°\tan 30°}$ $\left[\because \tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1+\tan A\tan B}\right]$

$= \dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\times\frac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \times \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{3+1-2\sqrt{3}}{3-1} = \dfrac{2(2-\sqrt{3})}{2} = (2-\sqrt{3})$

उदाहरण 6

सिद्ध कीजिए: $\cot x\cot 2x - \cot 2x\cot 3x - \cot 3x\cot x = 1$

उत्तर

$\cot(2x + x) = \cot 3x$

$\Rightarrow \dfrac{\cot 2x\cot x - 1}{\cot x + \cot 2x} = \cot 3x$ $\left[\because \cot(A+B) = \dfrac{\cot A\cot B - 1}{\cot B + \cot A}\right]$

$\Rightarrow \cot 2x\cot x - 1 = \cot 3x(\cot x + \cot 2x)$

$\Rightarrow \cot 2x\cot x - 1 = \cot 3x\cot x + \cot 3x\cot 2x$

$\Rightarrow \cot 2x\cot x - \cot 3x\cot x - \cot 3x\cot 2x = 1$

उदाहरण 7

सिद्ध कीजिए: $\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1$

उत्तर

बायाँ पक्ष $= \cos 6x = \cos 2(3x)$

$= 2\cos^2 2x - 1$ $\quad [\because \cos 2A = 1 - 2\sin^2 A]$

$= 2(4\cos^3 x - 3\cos x)^2 - 1$ $\quad [\because \cos 3A = 1 - 2\sin^2 A]$

$= 2(16\cos^6 x + 9\cos^2 x - 24\cos^4 x) - 1$

$= 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1 =$ दायाँ पक्ष

त्रिकोणमितीय समीकरण

एक चर राशि में त्रिकोणमितीय फलनों वाले समीकरण को त्रिकोणमितीय समीकरण कहते हैं

मुख्य हल - त्रिकोणमितीय समीकरणों के ऐसे हल जहाँ $0 \le x \le 2\pi$ होता है मुख्य हल कहलाते हैं

व्यापक हल – n से युक्त व्यंजक जो समीकरण के सभी हल व्यक्त करता है व्यापक हल कहलाता है, जहाँ n पूर्णांक है

प्रमेय

1) **sin x = 0** का व्यापक हल $x = n\pi$ जहाँ $n \in Z$

2) **cos x = 0** तो $x = (2n+1)\pi/2$ जहाँ $n \in Z$

3) **tan x = 0** तो $x = n\pi$ जहाँ $n \in Z$

4) **cot x = 0** तो $x = (2n+1)\pi/2$ जहाँ $n \in Z$

नोट – [**sec x = 0** तथा **cosec x = 0** का कोई हल नहीं होता है क्योंकि $\sec x \ge 1$ या $\sec x \le -1$ यही cosec x के लिए]

5) **sin x = sin y** तो $x = n\pi + (-1)^n y$ जहाँ $n \in Z$

6) **cos x = cos y** तो $x = 2n\pi \pm y$ जहाँ $n \in Z$

7) **tan x = tan y** तो $x = n\pi + y$ जहाँ $n \in Z$

8) **cosec x = cosec y** तो $x = n\pi + (-1)^n y$ जहाँ $n \in Z$

9) **sec x = sec y** तो $x = 2n\pi \pm y$ जहाँ $n \in Z$

10) **cot x = cot y** तो $x = n\pi + y$ जहाँ $n \in Z$

उदाहरण

<u>उदाहरण 1</u> - निम्नलिखित समीकरण का मुख्य तथा व्यापक हल ज्ञात कीजिये

$\tan x = \sqrt{3}$

उत्तर

$\tan x = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \quad \text{or} \quad \pi + \frac{\pi}{3}$ $\qquad$ [$\because$ पहले और तीसरे चतुर्थांश में tan धनात्मक होता है]

इसलिए, मुख्य हल $x = \frac{\pi}{3}$ और $x = \frac{4\pi}{3}$

तथा व्यापक हल $x = n\pi + \frac{\pi}{3}$, जहाँ $n \in Z$ है।

<u>उदाहरण 2</u> - निम्नलिखित समीकरण का मुख्य तथा व्यापक हल ज्ञात कीजिये

$cosec\, x = -2$

उत्तर

$\operatorname{cosec} x = -2 \qquad \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \sin x = -\sin\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{or} \quad 2\pi - \frac{\pi}{6}$ $\qquad$ [$\because$ तीसरे और चौथे चतुर्थांश में sin ऋणात्मक होता है]

इसलिए, मुख्य हल $x = \frac{7\pi}{6}$ और $x = \frac{11\pi}{6}$

तथा व्यापक हल $x = n\pi + (-1)^n\frac{7\pi}{6}$, जहाँ $n \in Z$ है।

<u>उदाहरण 3</u> - निम्नलिखित समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिये

$\sin 2x + \cos x = 0$

उत्तर

$\sin 2x + \cos x = 0$

$\Rightarrow 2\sin x\cos x + \cos x = 0$ $\qquad$ [$\because \sin 2A = 2\sin A\cos A$]

$\Rightarrow \cos x\,(2\sin x + 1) = 0$

$\Rightarrow \cos x = 0$ या $2\sin x + 1 = 0$

यदि $\cos x = 0$ तो व्यापक हल $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, जहाँ $n \in Z$ है।

यदि $2\sin x + 1 = 0$ तो $\sin x = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin x = -\sin\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \sin x = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow \sin x = \sin\frac{7\pi}{6}$

इसलिए, व्यापक हल $x = n\pi + (-1)^n\frac{7\pi}{6}$, जहाँ $n \in Z$ है।

उदाहरण 4 - निम्नलिखित समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिये

$\sec^2 2x = 1 - \tan 2x$

उत्तर

$\sec^2 2x = 1 - \tan 2x$

$\Rightarrow 1 + \tan^2 2x = 1 - \tan 2x = 0 \qquad [\because \sec^2 A = 1 + \tan^2 A]$

$\Rightarrow \tan^2 2x + \tan 2x = 0$

$\Rightarrow \tan 2x\,(\tan 2x + 1) = 0$

$\Rightarrow \tan 2x = 0$ या $\tan 2x + 1 = 0$

यदि $\tan 2x = 0$ तो व्यापक हल $2x = n\pi$, अर्थात $x = \frac{n\pi}{2}$ जहाँ $n \in Z$ है।

यदि $\tan 2x + 1 = 0$ तो $\tan 2x = -1$

$\Rightarrow \tan 2x = -\tan\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \tan 2x = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \tan 2x = \tan\frac{3\pi}{4}$

इसलिए, व्यापक हल $2x = n\pi + \frac{3\pi}{4}$, अर्थात $x = \frac{n\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$ जहाँ $n \in Z$ है।

अभ्यास हेतु प्रश्न

1) $\sin\frac{\pi}{12}\ \sin\frac{5\pi}{12}$ का मान ज्ञात कीजिये |

2) $\cos x = \frac{1}{2}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिये |

3) $\sin 4x + \sin 2x$ को गुणनफल के रूप में बदलिए |

4) सिद्ध कीजिए : $\cos 18° - \sin 18° = \sqrt{2}\ \sin 27°$ |

आभार - विद्यालयी शिक्षा परिषद्, उत्तराखंड द्वारा निर्धारित पाठ्य-पुस्तकें एवं सहायक पाठ्य पुस्तकें |