==

त्रिविमीय ज्यामिति

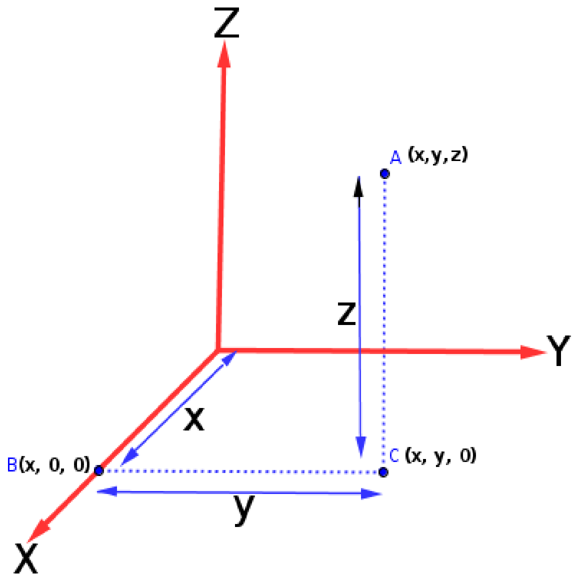
(Three Dimensional Geometry)

===

Made by:
Kaustubh Chandra Joshi,
Principal, **G.I.C.Pattharkhani (Pithoragarh)**

अन्तरिक्ष में एक बिन्दु के निर्देशांक(Coordinates of a point in space):

अन्तरिक्ष में स्थित बिन्दु A को (x , y, z) निर्देशांक द्वारा व्यक्त किया जाता है।



विभिन्न अष्टांशों में स्थित बिन्दओं के निर्देशांक(Coordinates of points in different octants):

अष्टांश का क्रम	निर्देशांको के चिन्ह			बिन्दु के निर्देशांको के चिन्ह
	x-निर्देशांक	y-निर्देशांक	z-निर्देशांक	
I	+	+	+	(+, +, +)
II	-	+	+	(-, +, +)
III	-	-	+	(-, -, +)
IV	+	-	+	(+, -, +)
V	+	+	-	(+, +, -)
VI	-	+	-	(-, +, -)
VII	-	-	-	(-, -, -)
VIII	+	-	-	(+, -, -)

दो बिन्दुओं के बीच की दूरी(Distance between two points):

यदि बिन्दुओं A तथा B के निर्देशांक क्रमशः (x_1, y_1, z_1), तथा (x_2, y_2, z_2) हों, तब समकोंण Δ PDQ में :

$$PQ^2 = PD^2 + DQ^2 \quad ....(1)$$

तथा समकोंण Δ RQT में :

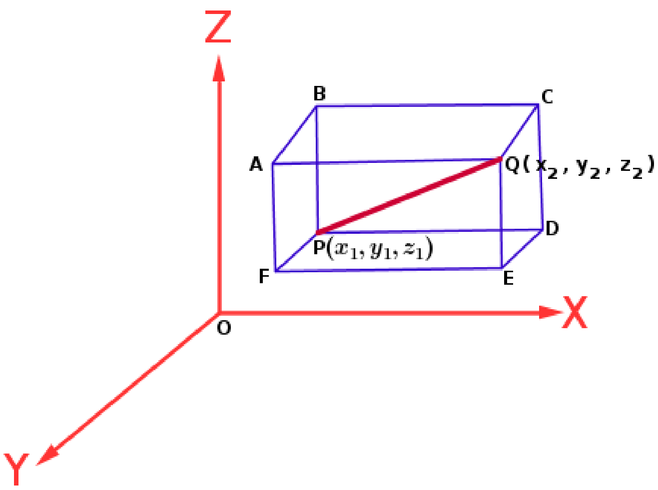
$$DQ^2 = DE^2 + EQ^2 \quad ....(2)$$

समी0 (1), (2) से:

$$PQ^2 = PD^2 + DE^2 + EQ^2$$

अथवा $PQ^2 = DE^2 + PD^2 + EQ^2$

$$\Rightarrow \quad PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$



अतः बिन्दुओं (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) के बीच की दूरी

$$PQ = \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]} \; .$$

स्पष्टतः

1. मूल बिन्दु (0, 0, 0) तथा P(x , y, z) के बीच की दूरी $AB = \sqrt{[(x)^2 + (y)^2 + (z)^2]}$.
2. यदि तीन बिन्दुओं A , B तथा C इस प्रकार हों कि AB + BC = AC तब तीनों बिन्दुओं संरेख होते है।

बिभाजन सूत्र(Section formula):

1. किसी xyz तल में यदि दो बिन्दुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखा PQ को $m_1 : m_2$ के अनुपात में अन्तः विभजित करने वाले बिन्दु R के निर्देशांक (x , y , z) है।

समरूप Δ RPS तथा Δ RQT में :

$$\frac{RP}{RQ} = \frac{PS}{QT} = \frac{RB - PA}{QC - TC} = \frac{RB - PA}{QC - RB}$$

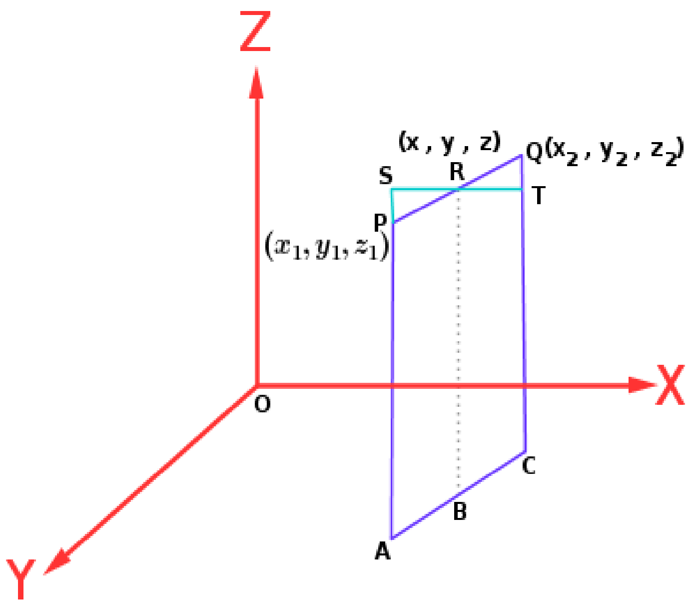
$$\Rightarrow \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{z - z_1}{z_2 - z}$$

$$\Rightarrow \quad m_1(z_2 - z) = (z - z_1)m_2$$

$$\Rightarrow \quad m_1 z_2 - m_1 z = z m_2 - z_1 m_2$$

$$\Rightarrow \quad m_1 z_2 + m_2 z_1 = z(m_1 + m_2)$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{m_1 z_2 + m_2 z_1}{m_1 + m_2}$$



इसी प्रकार $y = \dfrac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$

एंव $x = \dfrac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$.

2. किसी xyz तल में यदि दो बिन्दुओं $P(x_1 , y_1 , z_1)$ तथा $Q(x_2 , y_2 , z_2)$ को मिलाने वाली रेखा PQ को $m_1 : m_2$ के अनुपात में बाह्यतः विभजित करने वाले बिन्दु R के निर्देशांक (x , y , z) है, तो

$$x=\frac{m_1 x_2-m_2 x_1}{m_1-m_2} \quad , \quad y=\frac{m_1 y_2-m_2 y_1}{m_1-m_2} \quad , \quad z=\frac{m_1 z_2-m_2 z_1}{m_1-m_2}$$

3. यदि दो बिन्दुओं $P(x_1 , y_1 , z_1)$ तथा $Q(x_2 , y_2 , z_2)$ को मिलाने वाली रेखा PQ के मध्य बिन्दु R के निर्देशांक (x , y , z) है, तो $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$, $z=\frac{z_1+z_2}{2}$

4- यदि बिन्दु $A(x_1 , y_1 , z_1)$, $B(x_2 , y_2 , z_2)$ तथा $C(x_3 , y_3, z_3)$ किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष है तो केन्द्रक P(x, y, z) के निर्देशांकः $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$, $z=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$

उदाहरण(Example):

उदाहरण1: क्या बिन्दु A(3, 6, 9), B(10, 20, 30) तथा (25, -41, 5) एक समकोंण त्रिभुज के शीर्ष है ?

हल1: दिया है: A(3, 6, 9), B(10, 20, 30) तथा (25, -41, 5)

∵ $AB^2=(10-3)^2+(20-6)^2+(30-9)^2$

$\Rightarrow \quad AB^2=686$,

$BC^2=(25-10)^2+(-41-20)^2+(5-30)^2$

$\Rightarrow \quad BC^2=4571$,

तथा $CA^2=(3-25)^2+(6+41)^2+(9-5)^2$

$\Rightarrow \quad CA^2=2709$

इस प्रकार $CA^2+AB^2\neq BC^2$

अतः त्रिभुज ABC एक समकोंण त्रिभुज नही है।

उदाहरण 2: उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (a, 0,0), (0, b, 0), (0, 0, c) तथा (0, 0, 0) से बराबर दूरी पर है।

हल 2: माना बिन्दु P(x, y, z) है जो कि बिन्दुओं A(a, 0,0), B(0, b, 0), C(0, 0, c) तथा O(0, 0, 0) से बराबर दूरी पर है।

तब AP = BP = CP = OP $\Rightarrow$ $AP^2 = BP^2 = CP^2 = OP^2$

$$\Rightarrow \quad (x-a)^2+(y-0)^2+(z-0)^2 \; = \; (x-0)^2+(y-b)^2+(z-0)^2$$

$$= \; (x-0)^2+(y-0)^2+(z-c)^2 \; = \; (x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2+z^2-2ax+a^2 \; = \; x^2+y^2+z^2-2bx+b^2 \; = \; x^2+y^2+z^2-2cz+c^2 \; = \; x^2+y^2+z^2$$

$$\Rightarrow \quad -2ax+a^2 = -2bx+b^2 = -2cz+c^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=\frac{c}{2}$$

अतः बिन्दु $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$ है।

उदाहरण 3: उस त्रिभुज का केन्द्रक ज्ञात कीजिए जिसके शीर्षो के निर्देशांक (1, 4, 7), (2, 6, 3) तथा (-2, 5, 8) है।

हल 3: यदि बिन्दु A (x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2) तथा C(x_3, y_3, z_3) किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष है तो केन्द्रक P(x, y, z) के निर्देशांकः

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{1+2-2}{3}=\frac{1}{3} \;,\; y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=\frac{4+6+5}{3}=5 \;,\; z=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}=\frac{7+3+8}{3}=6$$

अतः त्रिभुज के केन्द्रक = $\left(\frac{1}{3},5,6\right)$

उदाहरण 4: बिन्दुओं (6, 12, 15) तथा (9, 15, -12) को मिलाने वाला रेखाखण्ड, xy-तल को किस अनुपात में विभाजित करता है?

हल 4: माना xy तल में बिन्दुओं P(6, 12, 15) तथा Q(9, 15, -12) को मिलाने वाली रेखा PQ को m : 1 के अनुपात में विभजित करने वाले बिन्दु R के निर्देशांक (x , y , z) है।

$$x=\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}=\frac{9k+6}{k+1} \;,\; y=\frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}=\frac{15k+12}{k+1} \;,\; z=\frac{m_1z_2+m_2z_1}{m_1+m_2}=\frac{-12k+15}{k+1} .$$

परन्तु बिन्दु R(x , y , z), xy- तल में स्थित है।

अर्थात $z=0=\frac{-12k+15}{k+1}$

$$\Rightarrow \quad k=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$$

अतः xy तल में बिन्दुओं (6, 12, 15) तथा (9, 15, -12) को मिलाने वाली रेखाखण्ड को 5 : 4 के अनुपात में विभजित करता है।

References: निम्न संदर्भों द्वारा संकलित एंव ICT कार्यो हेतु निःशुल्क प्रसारित–

1. विद्यालयी शिक्षा परिषद, उत्तराखण्ड द्वारा निर्धारित पाठ्य– पुस्तक, गणित कक्षा 11, अध्याय–12 .

2- सहायक पाठ्य पुस्तक student advisor- डा0 आर0के0 श्रीवास्तव,S. P. institute of science & technology, Gorakhpur: गणित कक्षा–11,भाग–2,अध्याय–12 .

3- Computer hardware - software.