



गणितीय विवेचन (Mathematical Reasoning)

Made by:
Kaustubh Chandra Joshi,
Principal,
G.I.C.Pattharkhani
(Pithoragarh)

कथन(Statements):

गणित की भाषा में एक वाक्य को कथन कहा जाता है,यदि वह या तो सत्य हो अथवा असत्य दोनों न हो ।

किसी कथन का निषेधन(Negation of Statements):

किसी कथन को नकारना उस कथन का निषेधन कहलाता है ।

मिश्र कथन (Compound statements):

वह गणितीय कथन जो और (तथा),या (अथवा) आदि प्रकार के संयोजक शब्दों द्वारा एक से अधिक कथनों को जोड़कर प्राप्त होता है, उसे मिश्र कथन कहते हैं ।

विशेष शब्द / वाक्यांश(Special words/ phrases):

संयोजन शब्द 'और' (The connective word 'And'):

संयोजक 'और' के प्रयोग से मिश्र कथन सत्य या असत्य होंगे,यदि—

- मिश्र कथन के सभी घटक कथन सत्य हों तो मिश्र कथन भी सत्य होगा ।
- मिश्र कथन के सभी घटक कथन असत्य हों या कम से कम एक घटक असत्य हो तो मिश्र कथन भी असत्य होता है ।

शब्द 'या' से प्रयुक्त वाक्य(Sentences with the word 'OR'):

संयोजक 'या' के प्रयोग से बना मिश्र कथन सत्य या असत्य होगा यदि —

- इसका एक घटक कथन सत्य हो अथवा दोनों घटक कथन सत्य हों ,तब मिश्र कथन सत्य होता है ।
- इसके दोनों घटक कथन असत्य हों तब मिश्र कथन भी असत्य होता है ।

अपवर्जित 'या' और अन्तर्विष्ट 'या'(Exclusive 'OR' and Inclusive 'OR'):

संयोजक 'या' प्रयुक्त मिश्र कथन सत्य या असत्य होगा यदि —

- अन्तर्विष्ट 'या' प्रयुक्त मिश्र कथन सत्य होता है,जब उसका कोई एक घटक सत्य हो या उसके दोनों घटक कथन सत्य हों ।
- अन्तर्विष्ट 'या' प्रयुक्त मिश्र कथन सत्य होता है,जब उसके दोनों घटक कथन असत्य होते हैं ।

परिमाण वाचक वाक्यांश (सूक्ति)(Quantifiers phrases):

उन वाक्यांशों को परिमाणवाचक वाक्यांश कहा जाता है, जिसमें "एक ऐसे का अस्तित्व है" और "सभी के लिए/प्रत्येक के लिए " प्रयुक्त होता है ।

अन्तर्भाव या सप्रतिबन्ध कथन(Implications or conditional statements):

वे कथन जिसमें 'यदि तो', 'केवल यदि' और 'यदि और केवल यदि' प्रयुक्त होते हैं जो कि अन्तर्भाव या सप्रतिबन्ध कारक है, उन्हें अन्तर्भाव या सप्रतिबन्ध कथन कहते हैं।

विलोम कथन(Converse statements):

'यदि p तो q ' के लिए कथन 'यदि p तो q ' 'विलोम कथन' कहलाता है।

किसी कथन की वैधता के परीक्षण के नियम

(Rules for verification of the validity of statements):

किसी कथन की वैधता के परीक्षण के निम्नलिखित नियम हैं –

नियम 1. यदि p तथा q गणितीय कथन है, तो यह सिद्ध करने के कि कथन " p और q " सत्य हैं, हमें यह सिद्ध करना होगा कि

- (i) कथन p सत्य है।
- (ii) कथन q सत्य है।

नियम 2. यदि कथन p और q गणितीय कथन है तो यह प्रमाणित करने के लिए कि कथन " p या q सत्य है, हमें यह सिद्ध करना होगा कि

- (i) जब p असत्य है तो q अनिवार्यतः सत्य है।
- (ii) जब q असत्य है तो p अनिवार्यतः सत्य है।

नियम 3. यदि कथन p और q गणितीय कथन है तो प्रमाणित करने के लिए कि कथन "यदि p तो q " सत्य है, सिद्ध करना होगा कि —

- (i) जब p सत्य है तो q अनिवार्यतः सत्य है। (प्रत्यक्ष विधि)
- (ii) जब q असत्य है तो p अनिवार्यतः असत्य है। (प्रतिधनात्मक विधि)

नियम 4. यदि कथन p और q गणितीय कथन हैं तो यह प्रमाणित करने के लिए कि कथन p यदि और केवल यदि सत्य है तो हमें सिद्ध करना चाहिए कि

- (i) यदि p सत्य हैं तो q सत्य है और
- (ii) यदि q सत्य हैं तो p सत्य है।

विरोधोक्ति द्वारा(By Contradiction):

इस विधि में दिए गए कथन के सापेक्ष एक ऐसा विरोधी उदाहरण प्रस्तुत किया जाता है तथा यह सिद्ध किया जाता है कि प्रदत्त कथन असत्य है। यह विधि प्रायः दिए गए कथन को असत्य सिद्ध करने हेतु अपनाई जाती है।

उदाहरण(Example)

उदाहरण—1: "किसी कक्षा के अच्छे छात्रों का समूह।"

यह स्पष्ट रूप से नहीं कहा जा सकता है कि कोई छात्र अच्छा है या नहीं। छात्र X कुछ लोगों की राय में अच्छा हो सकता है परन्तु कुछ लोगों की राय में अच्छा नहीं हो

सकता हैं। ऐसी स्थिति में यह निश्चित नहीं कहा जा सकता हैं के छात्र X अच्छे छात्रों में से एक हैं। अतः यह कथन नहीं है।

उदाहरण-2: क्या निम्नलिखित कथन युग्म (कथन के जोड़े) एक-दूसरे के निषेधन है ?

(i) संख्या X एक परिमेय संख्या नहीं हैं । संख्या X एक अपरिमेय संख्या नहीं है।

(ii) संख्या X एक परिमेय संख्या हैं । संख्या X एक अपरिमेय संख्या है।

हल : (i) पहला कथन- p: संख्या X एक परिमेय संख्या नहीं है

इसका निषेधन q: संख्या X एक परिमेय संख्या है।

या संख्या x एक अपरिमेय संख्या नहीं है।

दूसरा कथन- r: संख्या X एक अपरिमेय संख्या नहीं है।

अतः दोनों कथन एक दूसरे के निषेधन है।

(ii) पहला कथन- p : संख्या X एक परिमेय संख्या है।

इसका निषेधन q: संख्या X एक परिमेय संख्या नहीं है।

या संख्या x एक अपरिमेय संख्या है।

दूसरा कथन- r: संख्या X एक अपरिमेय संख्या है।

अतः दोनों कथन एक दूसरे के निषेधन है।

उदाहरण-3: निम्नलिखित मिश्र कथन के घटक कथन ज्ञात कीजिए-

(i) आज विद्यालय खुलेगा और हम विद्यालय जायेंगे।

(ii) मुझे बाजार जाना है और पुस्तकें खरीदनी है।

(iii) 2, प्राकृत संख्या है और 2, अभाज्य संख्या है।

(iv) धूप तेज है और गर्मी है।

हल : (i) यह मिश्र कथन है, घटक कथन इस प्रकार है-

p : आज विद्यालय खुलेगा।

q : हम विद्यालय जायेंगे।

यहाँ संयोजक शब्द ' और ' है।

(ii) यह मिश्र कथन है, घटक कथन इस प्रकार है-

p : मुझे बाजार जाना है ।

q : पुस्तकें खरीदनी है।

यहाँ संयोजक शब्द ' और ' है।

(iii) यह मिश्र कथन है, घटक कथन इस प्रकार है-

p : 2, प्राकृत संख्या है ।

q : 2, अभाज्य संख्या है।

यहाँ संयोजक शब्द ' और ' है।

(iv) यह मिश्र कथन है, घटक कथन इस प्रकार है-

p : धूप तेज है ।

q : गर्मी है।

यहाँ संयोजक शब्द ' और ' है।

उदाहरण-4: $\sin(\theta)$ का मान सदैव शून्य से अधिक होता है।

$\sin(\theta)$ का मान धनात्मक तथा ऋणात्मक दोनों होता है। इस प्रकार कथन सत्य भी है और असत्य भी। अतः यह कथन नहीं है।

उदाहरण-5: जाँचिए कि क्या नीचे लिखे कथनों के जोड़े एक दूसरे के निषेधन है। अपने उत्तर के कारण भी बताइए-

(i) प्रत्येक वास्तविक संख्याओं x और y के लिए $x+y=y+x$ सत्य है।

(ii) ऐसी वास्तविक संख्याओं x और y का अस्तित्व है जिनके लिए $x+y=y+x$ सत्य है।

हल :

(i) पहला कथन- p : प्रत्येक वास्तविक संख्याओं x और y के लिए $x+y=y+x$ सत्य है।

अतः कथन p : सभी वास्तविक संख्याओं x और y के लिए $x+y=y+x$ सत्य है।

p का निषेधन : सभी वास्तविक संख्याओं x और y के लिए $x+y=y+x$ सत्य नहीं है।

(ii) दूसरा कथन- q : ऐसी वास्तविक संख्याओं x और y का अस्तित्व है जिनके लिए $x+y=y+x$ सत्य है।

कथन q वही है जो कथन p है। $\Rightarrow p \equiv q$

अतः कथन स्वयं का निषेधन नहीं हो सकता है।

=====

=====

References: निम्न संदर्भों द्वारा संकलित एवं ICT कार्यो हेतु निःशुल्क प्रसारित-

1. विद्यालयी शिक्षा परिषद, उत्तराखण्ड द्वारा निर्धारित पाठ्यपुस्तक-गणित, कक्षा-11, अध्याय-14.

2- सहायक पाठ्य पुस्तक student advisor- डा0 आर0के0 श्रीवास्तव, S. P. institute of science & technology, Gorakhpur: गणित कक्षा-11, भाग-2, अध्याय-14.

3- सहायक पाठ्य पुस्तक Modern's abc-सत्यदेव नारायण सिंहा, P.G. college समस्तीपुर, बिहार: गणित कक्षा-11, भाग-2, अध्याय-14.

4- Computer hardware – software.