

बहुपद

1) चर – ऐसी राशियाँ जिनका मान बदलता रहता है , चर राशियाँ कहलाती है । जैसे – $x, y, z, P, Q, R, A, B, C$ आदि ।

2) अचर- ऐसी राशियाँ जिनका मान कभी नहीं बदलता, अचर राशियाँ कहलाती है । जैसे- $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ आदि ।

3) बीजीय व्यंजन – कुछ निश्चित चर तथा अचर राशियों के योग , अंतर , गुणन , भाग इत्यादि के संयोग से बने पद को बीजीय व्यंजन कहते हैं । जैसे $2X^2 - 3X + 1, 2y + 1, 3p, 5A + 6$

$3P = 3 \times P$, 3 अचर राशि , P चर राशि , (x) गुणा की संक्रिया

4) बहुपद – ऐसे बीजीय व्यंजन को बहुपद कहते हैं जिसमें

- 1) चर राशि का घातांक एक घनात्मक पूर्णांक हो ।
- 2) प्रत्येक पद में चर राशि का गुणांक एक वास्तविक संख्या हो ।
- 3) पदों की संख्या निश्चित (सीमित) हो ।

जैसे – $x^2 + x^2 + 2x + 3, 4x^2 - 5$ इत्यादि बहुपद हैं ।

परन्तु $x^2 - 1/x^2$ बहुपद नहीं हैं क्योंकि $1/x^2$ में चर x की घात -2 है जो घनात्मक नहीं है ।

प्रत्येक बीजीय व्यंजक बहुपद नहीं होता जबकि प्रत्येक बहुपद एक बीजीय व्यंजक होता है ।

चर्चा प्रश्न - $\sqrt{2}x, 1/4p$ व $1/x$ में कौन बहुपद है कौन बीजीय व्यंजक है?

बहुपद के प्रकार

एक पदी	द्विपदी	त्रिपदी	शून्य बहु पदी
केवल एक पद हो $x^2, ax, 1/4x^4$	केवल दो पद हो $x^2+5, 3p-6, ax+b$	केवल तीन पद हो x^2+5x+6	सभी पदों के गुणांक शून्य हो [0]

रैखिक बहुपद – चर की घात एक हो – $ax+b, x+5$

द्विघात बहुपद – चर की महत्तम घात 2 हो – x^2, ax^2+bx, p^2-8

त्रिघात बहुपद – चर की महत्तम घात 3 हो – x^3, x^3+x^2+1

बहुपद के शून्यक किसी बहुपद में चर के स्थान पर किसी वास्तविक संख्या को प्रतिस्थापित करने पर यदि बहुपद का मान शून्य आ जाये तो वह वास्तविक संख्या बहुपद का शून्यक कहलाती है ।

कोई बहुपद $x+5$ है, इसे हम $p(x)=x+5$ के रूप में लिख सकते हैं, अब x का वह मान निकलना होगा जिसे बहुपद $p(x)$ में रखने पर $p(x)$ का मान 0 आ जाये वह मान बहुपद का शून्यक होगा.

विधि 1- $p(x)$ में x के मान रखने पर 0, ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 4 , ± 5 जिस मान पर $p(x)$ शून्य आ जाये वह मान ही बहुपद का शून्यक होगा.

यथा $p(x) = x+5$

$$p(-5) = -5+5 = 0$$

अतः -5 बहुपद $p(x) = x+5$ का शून्यक होगा।

विधि 2- माना $p(x) = x+5$ का शून्यक a है

तब $p(a)=0$ होना चाहिए

परन्तु $p(a)=a+5$

$$a+5=0$$

$$a = -5$$

अतः बहुपद $p(x)=x+5$ का शून्यक -5 है

रेखिक बहुपद – केवल एक शून्यक होता है

द्विघात बहुपद – दो शून्यक हो सकते हैं

त्रिघात बहुपद – तीन शून्यक हो सकते हैं

यह आवश्यक नहीं है कि कोई बहुपद जितने घात वाला हो उस बहुपद के उतने शून्यक भी हो

x^2+a या x^2+1 का कोई वास्तविक शून्यक नहीं है

*उपरोक्त जानकारी का अध्ययन कर कक्षा 09 गणित पाठ 2 बहुपद के अंतर्गत प्रश्नावली 2.1, 2.2 हल की जा सकती है

यथा

$4x^2-3x+7$ एक चर में बहुपद है क्योंकि इस में केवल एक चर x है जिसकी घात घनात्मक पूर्णांक है और चर x का गुणांक वास्तविक संख्या है।

(i) $x^2 + x$ बहुपद द्विघातीय है क्योंकि चर की महत्तम घात 2 है।

(ii) $x - x^3$ बहुपद त्रिघातीय है क्योंकि चर x की महत्तम घात 3 है।

(iii) $p(y)=y^2-y+1$ का मान $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$ पर ज्ञात कीजिए

a) $p(0)=0^2-0+1$

b) $p(1)=1-1+1$

$$=1-1+1$$

$$=0+1$$

$$=1$$

c) $p(2)=2^2-2+1$

$$=4-2+1$$

$$=2+1$$

$$=3$$

v) बहुपद $p(x)=2x+5$ का शून्यक ज्ञात कीजिए

मान $p(x)=2x+5$ का शून्यक a है

तब $p(a)=0$ होना चाहिए

परन्तु $p(a)=2a+5$

$$2a+5=0 \Rightarrow 2a=-5$$

$$a=-5/2$$

अतः बहुपद $p(x)=2x+5$ का शून्यक $-5/2$ है।

शेषफल प्रमेय

(4) भाज्य = (भाजक X भागफल) + शेषफल

अंकगणित रूप में $15/6$

अर्थात्

$$15 = 6 \times 2 + 3$$

भाज्य = (भाजक X भागफल) + शेषफल

व्यापक रूप में यदि $p(x)$ और $g(x)$ ऐसे दो बहुपद हों कि $p(x)$ की घात $\geq g(x)$ की घात और $g(x) \neq 0$ हो तो हम ऐसे बहुपद $q(x)$ और $r(x)$ प्राप्त कर सकते हैं जिससे की

$$p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

प्रमेय प्रश्न $x^4+x^3-2x^2+x+1$ को $x-1$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए

उ० यहाँ $p(x)=x^4+x^3-2x^2+x+1$ है

और $x-1$ का शून्यक 1 है

अतः $p(1)=1^4+1^3-2(1)^2+1+1=1+1-2+1+1$

$$=4-2=2$$

अतः शेषफल प्रमेय के अनुसार $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ को $x - 1$ से भाग देने पर शेषफल 2 प्राप्त होता है।

गुणनखण्ड प्रमेय -

यदि $p(x)$ घात $x \geq 1$ वाला एक बहुपद हो और α कोई वास्तविक संख्या हो तो

(i) $p(\alpha) = 0$ होता है यदि $(x - \alpha)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड हो।

यथा - गुणनखंड प्रमेय लागू कर k बताये की प्रत्येक स्थिति में $g(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखंड है या नहीं ?

$$p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1, \quad g(x) = x + 1$$

गुणनखंड प्रमेय से :

$$g(x) = x + 1$$

$x + 1$ का शून्यक -1 है अतः

$$p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$$

$$p(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 1$$

$$= -2 + 1 + 2 - 1$$

$$= -3 + 3$$

$$= 0$$

शेषफल शून्य है अतः $g(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखंड होगा

* गुणनखंड ज्ञात कीजिये

$$(i) 12x^2 - 7x + 1$$

बहुपद द्विघात त्रिपद है अतः मध्यपद विखंडन से

$$= 12x^2 - 4x - 3x + 1$$

$$(a \times c = 12 \times 1)$$

$$= 4x(3x-1) - 1(3x-1)$$

$$= (3x-1)(4x-1)$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$12 = \underline{2 \times 2} \times 3$$

(4 व 3)

गुणनखंड ज्ञात कीजिये

$$x^3 - 2x^2 - x + 2$$

यह महत्तम घात 3 वाला चारपदी बहुपद है। इस प्रकार के बहुपद का गुणनखंड ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम अचर पद के अपवर्तक ज्ञात करते हैं।

इस बहुपद में अचर पद 2 है अतः अचर पद 2 के

अपवर्तक ± 1 व ± 2 होंगे।

माना $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

अतः क्रमशः $p(1)$, $p(-1)$, $p(2)$ व $p(-2)$ ज्ञात करते हैं। x के जिस मान पर बहुपद का मान शून्यक

यथा $p(1) = 1^3 - 2(1)^2 - 1 + 2$

$$= 1 - 2 - 1 + 2$$

$$= 3 - 3$$

$$= 0$$

अतः $(x - 1)$ बहुपद का एक गुणनखण्ड होगा।

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - x - 2 \\ x - 1 & \begin{array}{l} x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ x^3 - x^2 \\ \hline (-) (+) \\ -x^2 - x + 2 \\ -x^2 + x \\ \hline (+) (-) \\ -2x + 2 \\ -2x + 2 \\ \hline (+) (-) \end{array} \end{array}$$

अतः $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x^2 - x - 2)$

$$= (x - 1)(x^2 - 2x + x - 2) \text{ [मध्यपद विखंडन]}$$

$$= (x - 1)[x(x - 2) + 1(x - 2)]$$

$$= (x - 1)[(x - 2)(x + 1)]$$

$$\text{अतः } x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$$

परीक्षा की दृष्टि से महत्वपूर्ण प्रश्न

Q.1. बहुपदों में कोन-कोन बहुपद रैखिक है, कोन-कोन दिघाती है और कोन-कोन त्रिघाती है :

(i) $x^2 + x$ (ii) $x - x^3$ (iii) $4x^2 - 3x + 7$ (iv) $3t$

Q.2. प्रत्येक स्थिति में बहुपद का शून्यक ज्ञात कीजिए :

(i) $p(x) = x - 5$ (ii) $p(x) = cx + d : c \neq 0$

जहाँ c व d वास्तविक संख्याएँ हैं।

Q.3. $x^3 - ax^2 + 6x - a$ को $(x - a)$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

Q.4. K का मान ज्ञात कीजिए जबकि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में $(x - 1)$

$p(x)$ का एक गुणनखण्ड हो :

(i) $P(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

(ii) $P(x) = kx^2 - 3x + k$

Q.5. गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए:

(i) $6x^2 + 5x - 6$ (ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

Q.6. निम्नलिखित का गुणनखण्ड कीजिए।

(i) $27y^3 + 125z^3$

(ii) $27x^3 + y^3 + 2^3 - 9xyz$

उपयुक्त सर्वसमिकाए प्रयोग करके निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए ।

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad (102)^3 &= (100 + 2)^3 \\ &= (A + B)^3 \\ &= A^3 + B^3 + 3AB(A + B) \text{ [सर्वसमिका vi]} \\ &= 100^3 + 2^3 + 3 \times 100 \times 2(100 + 2) \\ &= 1000000 + 8 + 600 + 102 \\ &= 1000000 + 8 + 61200 \\ &= 1061208 \end{aligned}$$

महत्वपूर्ण प्रश्न

Q. यदि $x+y+z=0$ हो तो दिखाइये कि $x^3+y^3+z^3 = 3xyz$

उ० सर्वसमिका

$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = (A + B + C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA)$ में A, B, C के स्थान पर क्रमशः x, y व z रखने पर $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

∴ $x+y+z = 0$ (दिया है)

अतः $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \times (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0 + 3xyz$$

$$\boxed{x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz}$$

References: निम्न संदर्भों द्वारा संकलित एवं ICT कार्यो हेतु निःशुल्क प्रसारित—

— विद्यालयी शिक्षा परिषद, उत्तराखण्ड द्वारा निर्धारित पाठ्य— पुस्तक, गणित कक्षा 9, अध्याय—2 .