<u>संख्या पद्धति</u>

<u>कक्षाः–9</u>

मनीष पन्त
स0 अ0 एल0टी0 गणित
रा0इ0का0 झूलाघाट
पिथौरागढ़।

परिमेय संख्याः– परिमेय संख्या एक ऐसी संख्या है जिसे हम $\frac{p}{q}$, अर्थात अंश/हर के रुप में लिख सकते है। जहाँ p तथा q पूर्णाक हैं और $q \neq 0$ है (हर शून्य होने का अर्थ है कि वह संख्या अपरिभाषित हैं।) जैसेः– $\frac{4}{5}$, $-\frac{2}{6}$ आदि।

क्योकि $q = 1$ हो सकता है अतः प्रत्येक पूर्णाक एक परिमेय संख्या है। $e.g.$ $2 = \frac{2}{1}$, $0 = \frac{0}{1}$।

दो परिमेय संख्याओ के बीच परिमेय संख्याएँः–

उदा0 1ः– 1 और 2 के बीच 5 परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम हम 1 और 2 को परिमेय संख्या के रुप में लिखते है। अर्थात $1 = \frac{1}{1}$, $2 = \frac{2}{1}$ ।
तत्पश्चात हम दोनो संख्याओं के अंश व हर को 6(5+1) से गुणा करते है।

$\frac{1}{1} = \frac{1*6}{1*6} = \frac{6}{6}$, $\frac{2}{1} = \frac{2*6}{1*6} = \frac{12}{6}$ ।

अतः 1 व 2 के बीच 5 परिमेय संख्या है : $\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}, \frac{11}{6}$।

उदा0 2ः– $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ के बीच 3 परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम हम $\frac{1}{2}$और $\frac{1}{3}$को समान हर वाली परिमेय संख्या के रुप में बदलते है।
∵ 2 और 3 का ल0स0प0 6 है, अतः $\frac{1}{2} = \frac{1*3}{2*3} = \frac{3}{6}$, $\frac{1}{3} = \frac{1*2}{3*2} = \frac{2}{6}$ ।

तत्पश्चात हम दोनो संख्याओं के अंश व हर को 4(3+1) से गुणा करते है।

$$\frac{2}{6} = \frac{2*4}{6*4} = \frac{8}{24}\ , \frac{3}{6} = \frac{3*4}{6*4} = \frac{12}{24}$$ ।

अतः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ के बीच 3 परिमेय संख्या है : $\frac{9}{24}, \frac{10}{24}, \frac{11}{24}$ ।

विभिन्न उदाहरणों द्वारा हम समझ सकते है कि हम दो परिमेय संख्याओं के बीच अनेक परिमेय संख्याएँ ज्ञात कर सकते है अतः हम कह सकते है कि दो परिमेय संख्याओं के बीच अपरिमित रुप से अनेक परिमेय संख्याएँ होती हैं।

परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसारः–

परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार दो तरह के होते है।

(1) **सांत दशमलवः–** जब कुछ चरणों के पश्चात शेष शून्य हो जाता है। तो ऐसे दशमलव प्रसार को सांत दशमलव कहते हैं। जैसे $\frac{3}{4} = 0.75$, $\frac{7}{8} = .875$

(2) **अनवसानी आवर्तीः–** जब कुछ चरणों के पश्चात शेष की पुनरावृत्ति होने लगती है। तो ऐसे दशमलव प्रसार को अनवसानी आवर्ती कहते हैं। जैसे $\frac{1}{3} = 0.33333333 \ldots\ldots$, यहाँ 3 की पुनरावृत्ति हो रही है, अतः हम इसे $0.\overline{3}$ के रुप में लिखते हैं।

अनवसानी आवर्ती संख्याओं को परिमेय संख्या के रुप में लिखना

उदा0 3:– $0.\overline{5}$ को $\dfrac{p}{q}$ के रुप में व्यक्त कीजिए , जहाँ p तथा q पूर्णाक हैं और $q \neq 0$ है

माना $x = 0.\overline{5} = 0.5555..$ $--------(1)$

क्योकि यहाँ 1 अंक की पुनरावृत्ति हो रही है, अतः हम x को 10 से गुणा करते हैं।

$10x = 5.5555..$ $--------(2)$

$x = 0.5555..$ $--------(1)$ समी0 (2) – (1)

$9x = 5.0000\ldots$

अतः $x = \frac{5}{9}$

उदा0 4:– $0.4\overline{18}$ को $\dfrac{p}{q}$ के रुप में व्यक्त कीजिए , जहाँ p तथा q पूर्णाक हैं और $q \neq 0$

माना $x = 0.4\overline{18} = 0.41818..$ $--------(1)$

क्योकि यहाँ 2 अंक की पुनरावृत्ति हो रही है, अतः हम x को 100 से गुणा करते हैं।

$100x = 41.8181..$ $--------(2)$

$x = 0.4181..$ $--------(1)$ समी0 (2) – (1)

$99x = 41.4000\ldots$

अतः $x = \frac{41.4}{99} = \frac{414}{990}$ ।

जिन संख्याओं के दशमलव प्रसार असांत और अनवसानी अनावर्ती होते है, वे संख्याए **अपरिमेय संख्याए** कहलाती हैं। $e.g.$ $\sqrt{2}, 5, \pi, \ldots\ldots.., 1.23456658 \ldots\ldots\ldots$ आदि।

(पूर्ण वर्ग संख्याकों को छोडकर अन्य सभी संख्याओं के वर्गमूल अपरिमेय होते है। जैसे $\sqrt{4} = 2$ एक परिमेय संख्या हैं।) तथा सभी परिमेय व अपरिमेय संख्याओं के संग्रह को **वास्तविक संख्या** कहते हैं।

वास्तविक संख्याओं पर संक्रियाएँ

- परिमेय व अपरिमेय संख्या का योग एवं अन्तर सदैव अपरिमेय होता है।
- परिमेय व अपरिमेय संख्या का गुणा एवं भाग सदैव अपरिमेय होता है।
- दो अपरिमेय संख्या का गुणन सदैव अपरिमेय नहीं होता है।

$e.g.\ \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ अपरिमेय। $(\because \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab})$

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$ परिमेय। $(\because \sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a)$

उदा0 5:– निम्न व्यंजको को सरल कीजिए:

(i) $(2 + \sqrt{3})(3 + \sqrt{2})$ (ii) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$

(i) $(2 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{2}) = 2(3 - \sqrt{2}) + \sqrt{3}(3 - \sqrt{2})$

$= 6 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - \sqrt{6}$

(ii) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}$ $(\because (a + b)^2 = (a)^2 + (b)^2 + 2ab)$

$= 2 + 3 + 2\sqrt{6} = 5 + 2\sqrt{6}$

हर का प्रमेयीकरण अर्थात किसी अपरिमेय संख्या के हर को परिमेय संख्या में परिवर्तित करना, क्योकि हर एक परिमेय संख्या होगी तो हम इसे सरलता से हल कर सकते हैं।

उदा0 6:– $\frac{1}{\sqrt{3}}$ के हर का प्रमेयीकरण कीजिए।

क्योंकि किसी भी वर्गमूल वाली संख्या का वर्ग करने पर या उस संख्या को उसी संख्या से गुणा करने पर वर्गमूल का चिन्ह हट जाता है अर्थात $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$ ।

अतः हम $\frac{1}{\sqrt{3}}$ के हर व अंश को $\sqrt{3}$ से गुणा करेगे।

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

उदा0 7:– $\frac{1}{\sqrt{7}-1}$ के हर का प्रमेयीकरण कीजिए।

$$\because (a+b)(a-B) = a^2 - b^2$$

अतः हम $\frac{1}{\sqrt{7}-1}$ के हर व अंश को $\sqrt{7}+1$ से गुणा करेगे।

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{7}-1} = \frac{1\times(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7}-1)\times(\sqrt{7}+1)} = \frac{(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7})^2-1^2} = \frac{\sqrt{7}+1}{7-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{6}$$

घातांक के नियम :–

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$, जहाँ a को आधार तथा m और n को घातांक कहते है।
  $e.g.\quad 3^5 \times 3^2 = 3^{5+2} = 3^7$
- $a^m \div a^n = a^{m-n}$, $e.g.\quad 11^7 \times 11^4 = 11^{7-4} = 11^3$
- $(a^m)^n = a^{mn}$, $e.g\ (2^3)^{-5} = 2^{-15}$
- $a^m \times b^m = (ab)^m$, $e.g.\ 2^2 \times 3^2 = (6)^2 = 36$
- $a^0 = 1$, $e.g.\ 100^0 = 1$

उदा0 8:– ज्ञात कीजिए:

(i) $243^{2/5}$ (ii) $343^{-2/3}$ (iii) $2^{3/4} \times 2^{-2/3}$

(i) $243^{2/5} = (3\times3\times3\times3\times3)^{2/5}$ सर्वप्रथम हम 243 के अभाज्य गुणनखण्ड करेगें।

$= (3^5)^{2/5}$, संख्या 3, 5 बार आ रही है अतः इसे हम 3^5 के रुप में लिखिगें।

$= 3^{5\times2/5} = 3^{10/5} = 3^2 = 9 \quad \because (a^m)^n = a^{mn}$

(ii) $343^{-2/3} = (7\times7\times7)^{-2/3}$

$= (7^3)^{-2/3}$

$= 7^{3\times-2/3} = 7^{-6/3} = 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49} \qquad \because (a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $2^{3/4} \times 2^{-2/3}$

$= 2^{\frac{3}{4}+(-\frac{2}{3})} = 2^{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{9-8}{12}} = 2^{1/12}, \qquad \because a^m \times a^n = a^{m+n},$

प्रश्नावली

प्रश्न 1:– $\frac{2}{3}$ और $\frac{3}{4}$ के बीच 5 परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 2:– $1.\overline{8}$ को $\frac{p}{q}$ के रुप में व्यक्त कीजिए , जहाँ p तथा q पूर्णाक हैं और $q \neq 0$ है।

प्रश्न 3:–$1.3\overline{56}$ को $\frac{p}{q}$ के रुप में व्यक्त कीजिए , जहाँ p तथा q पूर्णाक हैं और $q \neq 0$ है।

प्रश्न 4:–$1.\overline{001}$ को $\frac{p}{q}$ के रुप में व्यक्त कीजिए , जहाँ p तथा q पूर्णाक हैं और $q \neq 0$ है।

प्रश्न 5:– .5 और .55 के बीच में दो अपरिमेय संख्या ज्ञात करों।

प्रश्न 6:– हर का प्रमेयीकरण कीजिए।

(i) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{3}+2}$

प्रश्न 7:– बताइये निम्न में से कौन सी संख्या परिमेय है और कौन सी अपरिमेय।

(i) $\sqrt{7}$ (ii) $(2+\sqrt{3})$ (iii) $5\sqrt{2}$ (iV) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

प्रश्न 8:– निम्न व्यंजको को सरल कीजिए।

(i) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ (ii) $(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})$

प्रश्न 9:– ज्ञात कीजिए (i) $343^{1/3}$ (ii) $256^{3/8}$ (iii) $512^{-2/9}$

प्रश्न 10:– ज्ञात कीजिए (i) $3^{1/3} \times 3^{2/3}$ (ii) $7^{1/6} \div 7^{1/12}$

References: निम्न संदर्भो द्वारा संकलित एवं ICT कार्यो हेतु निशुल्क प्रसारित –

1:– विद्यालयी शिक्षा परिषद, उत्तराखण्ड द्वारा निर्धारित पाठ्यपुस्तक – गणित, कक्षा–10, अध्याय–5

2:– computer hardware – software