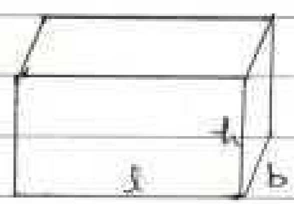
कक्षा 10th गणित

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन
(Surface area and volume)

हम विभिन्न प्रकार की आकृतियों जैसे घन, घनाभ, बेलन, कोन गोला एवं अर्द्धगोले से परिचित हैं और उनका मापन (आयतन एवं पृष्ठ) करना भी जानते हैं। इन आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन के सूत्र से पुनः एक बार और परिचित हो जाय —

→ घन का पार्श्व पृष्ठीय क्षे० $= 4a^2$
घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्र० $= 6a^2$
घन का आयतन $= a^3$

{ a = घन की भुजा है

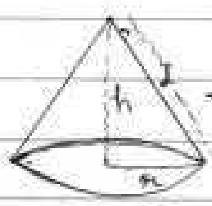


→ घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षे० $= 2(l+b)\times h$
घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षे० $= 2(lb+bh+hl)$
घनाभ का आयतन $= l\times b\times h$.

{ l = लम्बाई
b = चौड़ाई
h = ऊँचाई

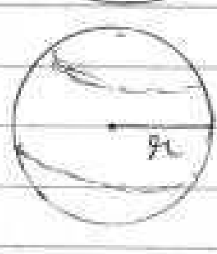
→ बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षे० $= 2\pi rh$
बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 2\pi r(h+r)$
बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

{ r = त्रिज्या
h = ऊँचाई



→ शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षे० $= \pi rl$
शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठ $= \pi r(l+r)$
शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$
शंकु की तिर्यक ऊँ० $l = \sqrt{h^2+r^2}$

{ r = त्रिज्या
h = ऊँचाई
l = तिर्यक ऊँचाई



गोले का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षे० $= 4\pi r^2$
गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$
अर्द्धगोले का वक्र पृष्ठ $= 2\pi r^2$
अर्द्ध गोले का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 3\pi r^2$
अर्द्ध गोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

{ r = गोले की त्रिज्या

ठोसों के संयोजन का पृष्ठीय क्षेत्रफल :-

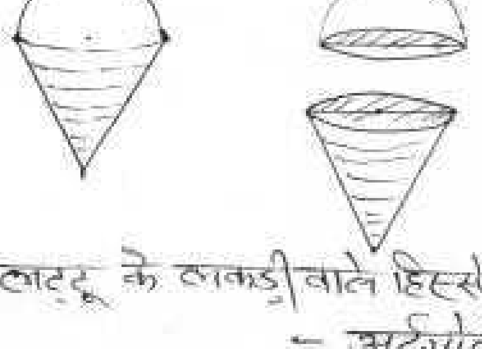
कुछ ठोस ऐसे होते हैं जिनका आकार इन आकारों से अलग होते हैं। जैसे प्रयोगशाला की परखनली, मंदिर या मस्जिद का गुम्बद, दवाई का कैप्सूल, बच्चों के खिलौने, लट्टू आदि। इस प्रकार के ठोसों का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए एक समस्या आती है परन्तु हम इन ठोसों की आकृति को देखकर छोटी-छोटी समस्याओं में तोड़ सकते हैं। जैसे दवाई का कैप्सूल को देखें —

उपरोक्त ठोस को देखने पर पता चलता है कि कैप्सूल एक बेलन और दो अर्द्ध गोलों से मिलकर बना है जिनसे हम पहले से परिचित हैं। जब हम पुन: इन टुकड़ों को मिलाते हैं तो हमें केवल अर्द्धगोलों तथा बेलन का वक्र पृष्ठ दिखाई देता है।

इसलिए उपरोक्त कैप्सूल (ठोस) का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल तीनों भागों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों के योग के बराबर होगा।

अत: ठोस का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल
= एक अर्द्धगोले का वक्र पृष्ठ + बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षे०
+ दूसरे अर्द्धगोले का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल

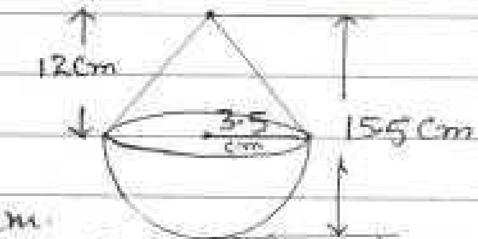
इसी प्रकार हम लट्टू की आकृति को देखते हैं तो पाते हैं लट्टू दो छोटी-2 आकृतियों से मिलकर बना हुआ है इसमें लगा कील अतिरिक्त भाग है। कील को छोड़कर इसके पृष्ठ पर रंग करवाने के लिए पेंट की मात्रा निकाल सकते हैं।



लट्टू के लकड़ी वाले हिस्से का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल
= अर्द्धगोले का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल
+ शंकु का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल

प्रश्न :- एक खिलौना त्रिज्या 3.5 सेमी वाले एक शंकु के आकार का है जो उसी त्रिज्या वाले एक अर्द्धगोले पर आध्यारोपित है। इस खिलौने की सम्पूर्ण ऊँचाई 15.5 Cm है। इस खिलौने का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :- ∵ हमें दिया है गोले एवं शंकु की त्रिज्या



$r = 3.5$ Cm

खिलौने की कुल ऊँचाई $= 15.5$ Cm

∴ शंकु की ऊँचाई $= 15.5 - 3.5 = 12$ Cm.

हमें ज्ञात करना है खिलौने का सम्पूर्ण पृष्ठ। खिलौने में अर्द्धगोले एवं शंकु दोनों के समतल पृष्ठ संयोजित हैं अतः दोनों का वक्र पृष्ठ ही खिलौने का पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा।

∴ खिलौने का सम्पूर्ण पृष्ठ $= \pi r l + 2\pi r^2 = \pi r(l + 2r)$

तिर्यक ऊँ० $l = \sqrt{r^2+h^2} = \sqrt{(3.5)^2 + (12)^2} = \sqrt{12.25+144}$

$= \sqrt{156.25} = 12.5$ Cm.

∴ $\pi r(l + 2r) = \frac{22}{7} \times 3.5 (12.5 + 2 \times 3.5)$

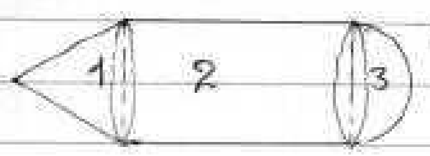
$= \frac{22}{7} \times 3.5 \times 19.5$

∴ सम्पूर्ण पृष्ठ $= 214.5$ Cm^2 उत्तर

ठोसों के संयोजन का आयतन :-

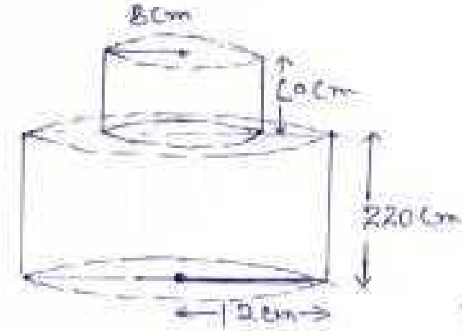
दो या दो से अधिक ठोसों के मिलाने पर पृष्ठों के क्षेत्रफलों को जोड़ा नहीं जा सकता है क्योंकि इनको मिलाने की प्रक्रिया में पृष्ठीय क्षेत्रफल का कुछ भाग लुप्त हो जाता है। परन्तु आयतन परिकलित करने की स्थिति में ऐसा नहीं होता है।

दो या दो से अधिक ठोसों के संयोजन से बने ठोस का आयतन दो या दो से अधिक घटकों के योग के बराबर होता है, जैसे निम्न आकृति में



मॉडल का आयतन =
शंकु का आयतन + बेलन का आयतन + अर्द्धगोले का आ

प्रश्न ! - ऊँचाई 220 Cm और आधार व्यास 24 Cm वाले एक बेलन, जिस पर ऊँचाई 60 Cm त्रिज्या 8 Cm वाला एक अन्य बेलन आध्यारोपित है, से लोहे का एक ~~स्तम्भ~~ स्तम्भ बना है। इस स्तम्भ का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, जबकि दिया है। 1 Cm^3 लोहे का द्रव्यमान लगभग 8 gm होता है। ($\pi = 3.14$)



हल ! - ∵ हमे दिया है -

आधार के स्तम्भ की ऊँ॰ $h_1 = 220$ Cm

" " " का व्यास = 24 Cm

" " " की त्रिज्या r_1 = 12 Cm

आधारोपित स्तम्भ की ऊँ॰ $h_2 = 60$ Cm

" " की त्रिज्या $r_2 = 8$ Cm

∴ दोनो का संयोजित आयतन $= \pi r_1^2 h_1 + \pi r_2^2 h_2$

$= \pi (r_1^2 h_1 + r_2^2 h_2)$

$= 3.14 (12^2 \times 220 + 8^2 \times 60)$

$= 3.14 (31680 + 3840)$

$= 3.14 \times 35520 = 111532.8 \ Cm^3$

∵ 1 Cm^3 लोहे का द्रव्यमान = 8 grams

∴ 111532.8 Cm^3 लोहे का द्रव्यमान = 111532.8 × 8

$= 892262$ ग्राम $= \frac{892262}{1000}$ Kg $= 892.262$ Kg

उत्तर

प्रश्न : एक ठोस एक अर्द्धगोले पर खड़े एक शंकु के आकार का है जिनकी त्रिज्याएँ 1 सेमी तथा शंकु की ऊँचाई उसकी त्रिज्या के बराबर है। इस ठोस का आयतन π के पदों में ज्ञात कीजिए।

हल : ∵ शंकु की त्रिज्या = अर्द्ध गोले की त्रिज्या = 1 सेमी -

शंकु की ऊँ॰ = शंकु की त्रिज्या = 1 सेमी

अर्द्ध गोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi (1)^3 = \frac{2}{3}\pi$ घन सेमी

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi (1)^3 = \frac{1}{3}\pi$ घन सेमी

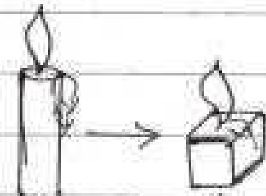
∴ ठोस का आयतन = अर्द्धगोले का आयतन + शंकु का आयतन

$= (\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi) = \pi$ घन सेमी

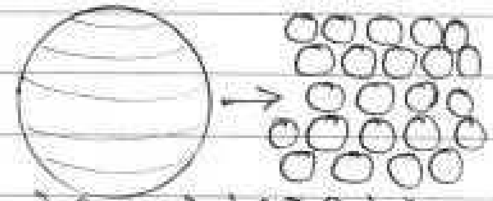
उत्तर

एक ठोस का एक आकार से दूसरे आकार में रूपान्तरण :-

जब एक ठोस को अन्य आकार के दूसरे ठोसों में परिवर्तित करते हैं अथवा कोई द्रव पदार्थ एक आकार के बर्तन से अन्य आकार के बर्तन में डाला जाता है तो नये ठोस या द्रव का वही आयतन होगा जो पहले ठोस का था अर्थात आकार के रूपान्तरण में आयतन अपरिवर्तित रहेगा।

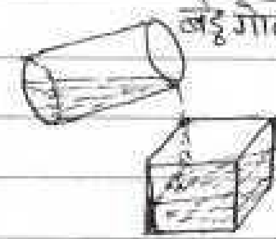


बेलन को घन के रूप में रूपांतरण



बड़े गोले को छोटी गोलियों के रूप में

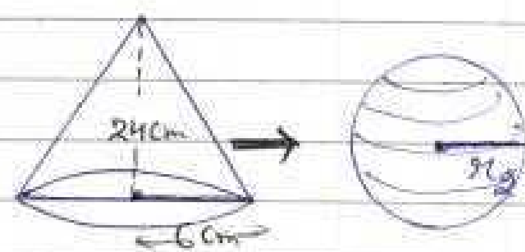
चित्र को देखने से पता चलता है कि ठोस या द्रव का अलग-2 आकृतियों में रूपान्तरण हुआ है, आयतन में नहीं।



बेलनाकार गिलास का पानी घनाकार बर्तन में

प्रश्न :- मॉडल बनाने वाली मिट्टी से ऊँचाई 24 सेमी और आधार त्रिज्या 6 cm वाला एक शंकु बनाया गया है। एक बच्चे ने इसे गोले के आकार में बदल दिया। गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल :- हमें दिया है



शंकु की ऊँचाई $h = 24$ सेमी

" " त्रिज्या $r_1 = 6$ सेमी

∴ शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r_1^2 h$

यदि गोले की त्रिज्या r_2 है। तो उसका आयतन $= \frac{4}{3}\pi r_2^3$

∵ शंकु का आयतन = गोले का आयतन

$$\therefore \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h$$

$$4 r_2^3 = 6 \times 6 \times 24$$

$$r_2^3 = \frac{6 \times 6 \times 24}{4} = 6 \times 6 \times 6$$

∴ $r = 6$ सेमी उत्तर

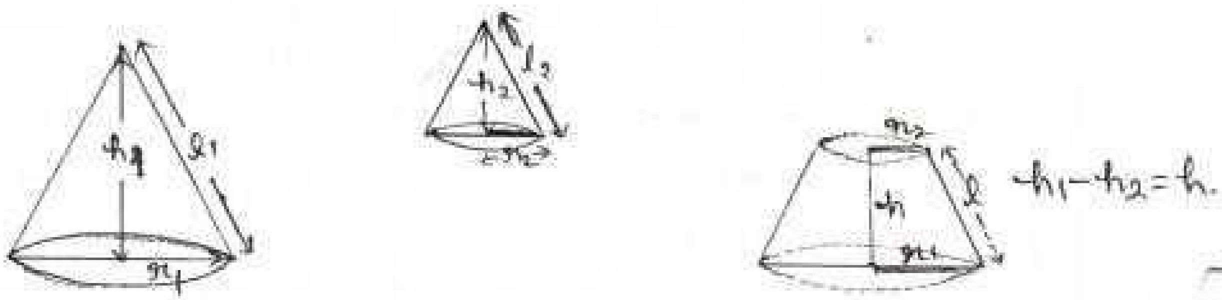
शंकु का छिन्नक :(frustum):-

यदि किसी शंकु को इसके आधार के समान्तर किसी तल द्वारा काटते हैं और इस तल के एक ओर के शंकु को हटा देते हैं, तो दूसरी ओर बचे शंकु के भाग को शंकु का छिन्नक कहते हैं।

जैसे गिलास, बाल्टी, गमला, पानी का टब आदि शंकु के छिन्नक आकार के होते हैं।

छिन्नक बनाने की विधि - चित्र

शंकु के छिन्नक का पृष्ठीय क्षेत्रफल :-



उपरोक्त चित्र से

छिन्नक का वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल = बड़े शंकु का वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल − छोटे शंकु का वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल

$= \pi r_1 l_1 - \pi r_2 l_2$

$= \pi(r_1 l_1 - r_2 l_2)$

छिन्नक का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + छोटे वृत्त का पृ० क्षे० + बड़े वृत्त का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= \pi(r_1 l_1 - r_2 l_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

उपरोक्त सूत्रों को त्रिभुज की समरूपता की अवधारणा का प्रयोग करके सूत्र को सरल किया जा सकता है —

शंकु के छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi(r_1+r_2)l$

जहाँ $l = \sqrt{h^2+(r_1-r_2)^2}$

शंकु के छिन्नक का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi l(r_1+r_2)+\pi r_1^2+\pi r_2^2$

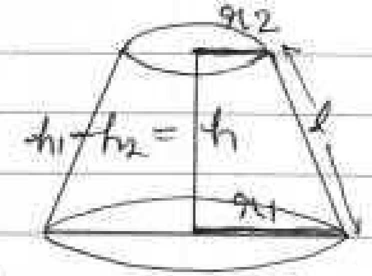
जहाँ $l = \sqrt{h^2+(r_1-r_2)^2}$

शंकु के छिन्नक का आयतन :-

छिन्नक का आयतन = बड़े शंकु का आयतन
− छोटे शंकु का आयतन

$= \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 - \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2$

$= \frac{1}{3}\pi(r_1^2 h_1 - r_2^2 h_2)$



त्रिभुज की समरूपता की अवधारणा का प्रयोग कर हम सूत्र को सरलतम रूप में खोज सकते हैं।

शंकु के छिन्नक का आयतन $= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2+r_2^2+r_1 r_2)$

उपरोक्त सूत्र में h शंकु के छिन्नक की ऊँचाई एवं l तिर्यक ऊँचाई ले रखी है।

प्रश्न : एक शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई 4 सेमी है तथा इसके वृत्तीय सिरों के परिमाप 18 सेमी और 6 सेमी हैं। इस छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : ∵ छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई $l = 4$ सेमी

एक सिरे की वृत्तीय परिधि $2\pi r_1 = 18$ सेमी

∴ त्रिज्या $r_1 = \frac{18}{2\pi} = 9/\pi$ सेमी

दूसरे सिरे की वृत्तीय परिधि $2\pi r_2 = 6$ सेमी

∴ $r_2 = 3/\pi$ सेमी

∵ छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi(r_1+r_2)l$

$$\therefore \quad \pi\left(\frac{9}{\pi}+\frac{3}{\pi}\right)\times 4$$

$$= \pi \times \frac{12}{\pi}\times 4 = 48 \text{ सेमी}^2$$

उत्तर

कुछ महत्वपूर्ण प्रश्न

प्रश्न (1) दो घनों, जिनमें प्रत्येक का आयतन 64 घनसेमी है के संलग्न फलकों को मिला कर एक ठोस बनाया गया है। इससे प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न (2) एक धातु के घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 11 सेमी 8 सेमी और 7 सेमी है। घनाभ को पिघलाकर 7 सेमी त्रिज्या के शंकु के रूप में ढाला जाता है। शंकु की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

प्रश्न (3) एक शंकु तथा एक बेलन के आधार तथा ऊँचाइयाँ समान हैं। उनके आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

प्रश्न (4) एक शंकु का छिन्नक जो 45 सेमी ऊँचा है, के सिरों की त्रिज्याएं 28 सेमी और 7 सेमी हैं। इसका आयतन ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

प्रश्न (5) सर्कस का एक तम्बू बेलनाकार और ऊपर से शंक्वाकार है। यदि बेलनाकार भाग का व्यास और ऊँचाई 126 मीटर और 5 मीटर है तथा कुल ऊँचाई 21 मीटर है तो तम्बू के बनाने में प्रयुक्त कपड़े का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। साथ ही 100 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से कपड़े का मूल्य भी ज्ञात कीजिए।

महेन्द्र प्रताप सिंह स०अ० एल०टी० गणित
एस०डी० एस०रा०इन्टर का० पिसौ०