

कक्षा - X द्विघात समीकरण

(1) द्विघात समीकरण का मानक रूप :-

किसी चर राशि x में समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $a \neq 0$ है, द्विघात समीकरण का मानक रूप है।

उदाहरण: $2x^2 + 3x - 5 = 0$, $4x - 3x^2 + 2 = 0$,
 $x^2 - 9 = 0$ द्विघात समीकरण हैं।

प्रश्न - 1 \rightarrow क्या $(x-2)^2 + 1 = 2x - 3$ द्विघात समीकरण है?

हल: यहाँ $(x-2)^2 + 1 = 2x - 3$

$$\Rightarrow x^2 + 2^2 - 2 \times x \times 2 + 1 = 2x - 3$$

$$\Rightarrow x^2 + 4 - 4x + 1 - 2x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

$\Rightarrow 1 \cdot x^2 - 6x + 8 = 0$ यह $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का है, अतः यह एक द्विघात समीकरण है।

प्रश्नावली

1- जाँच कीजिए कि क्या निम्नलिखित द्विघात समीकरण है या नहीं:

(i) $(x-1)^2 = 3x$ (ii) $x(2x+5) = x^2 + 3$

(iii) $(x+2)^2 = x^2 + 3$ (iv) $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$

द्विघात समीकरण हमारे आसपास के परिवेश की अनेक स्थितियों एवं गणित के विभिन्न क्षेत्रों में प्रयुक्त होते हैं। उदाहरणार्थ:

(1) एक आयताकार भूखंड का क्षेत्रफल 528 वर्ग मीटर है, भूखंड की लम्बाई (मीटरों में) चौड़ाई के दुगुने से एक अधिक है। हमें भूखंड की लम्बाई व चौड़ाई सोल करनी हैं।

हल: माना भूखंड की चौड़ाई = x मीटर

तब भूखंड की लम्बाई = $(2x+1)$ मीटर



भ्रूखंड का क्षेत्रफल = लम्बाई \times चौड़ाई

$$= (2x+1) \times x \text{ की मी०}$$

$$= (2x^2+x) \text{ "}$$

अब $2x^2+x=528$ (दिया है)

अर्थात् $2x^2+x-528=0$

अतः भ्रूखंड की चौड़ाई द्विघात समीकरण $2x^2+x-528=0$ को संतुष्ट करती है, तत्पश्चात् भ्रूखंड की लम्बाई भी प्राप्त हो जायेगी,

द्विघात समीकरणों का हल.

द्विघात समीकरणों को हल करने की दो विधियां हैं,

1- गुणनखंड विधि द्वारा द्विघात समीकरण का हल.

इस विधि में सर्वप्रथम द्विघात समीकरण को मानक रूप में अर्थात् $ax^2+bx+c=0$ के रूप में लिख लेते हैं तत्पश्चात् बायें पक्ष के गुणनखंड करते हैं, प्रत्येक गुणनखंड को 0 रखकर x के मान प्राप्त कर लेते हैं, यही x के मान द्विघात समीकरण के मूल होते हैं। उदाहरणार्थ

(1) $6x^2-x-2=0$ के मूल ज्ञात कीजिए,

हल: सर्वप्रथम मध्य पद $-x$ को $-4x+3x$ [क्योंकि $-4x \times 3x = -12x^2 = 6x^2 \times (-2)$] के रूप में विभक्त करते हैं अर्थात् मध्य पद को ऐसी दो राशियों के योग के रूप में लिखते हैं जिनका गुणनफल प्रथम व अंतिम पद के गुणनफल के बराबर हो,

अतः $6x^2-x-2=0$

$$\Rightarrow 6x^2-4x+3x-2=0$$

$$\Rightarrow 2x(3x-2)+1(3x-2)=0$$

$$\Rightarrow (3x-2)(2x+1)=0$$

अर्थात् $3x-2=0$ या $2x+1=0$

$$\text{अतः } 3x - 2 = 0 \quad \text{तथा } 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 3x = 0 + 2 \quad 2x = 0 - 1$$

$$\Rightarrow 3x = 2 \quad 2x = -1$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \quad x = -\frac{1}{2}$$

अतः $x = \frac{2}{3}$ तथा $x = -\frac{1}{2}$ दिए हुए समीकरण के हल हैं।

प्रश्नावली

1- गुणनखंड विधि द्वारा निम्न द्विघात समीकरणों के मूल ज्ञात कीजिए

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$

(ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

(iii) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

(iv) $3x^2 - 2\sqrt{5}x + 2 = 0$

(v) $x^2 + 5x + 6 = 0$

(vi) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

अन्तिम (vi) प्रश्न में सर्वप्रथम पूरी समीकरण को 8 से गुणा कर मानक रूप में परिवर्तित करेंगे तत्पश्चात् उपरोक्त प्रक्रिया अपनायेंगे अर्थात्

$$8 \times 2x^2 - 8 \times x + 8 \times \frac{1}{8} = 8 \times 0$$

$$\Rightarrow 16x^2 - 8x + 1 = 0$$

पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा द्विघात समीकरणों का हल : —

इस विधि में सर्वप्रथम समीकरण में x^2 के गुणांक से पूरी समीकरण को ~~क~~ के प्रत्येक पद को विभाजित कर देते हैं। इस प्रकार प्राप्त समीकरण में x के गुणांक को 2 से विभाजित कर जो संख्या प्राप्त होती है उसका वर्ग समीकरण के दोनों पक्षों में जोड़ देते हैं। इस प्रकार समीकरण में एक पूर्णवर्ग पद तथा दूसरा अचर पद प्राप्त हो जाता है। पूर्णवर्ग पद को समीकरण के बाएँ पक्ष में तथा अचर पद को

समीकरण के दोनों पक्ष में लिखकर दोनों पक्षों का वर्गमूल कर लेते हैं, इस प्रकार x के मान प्राप्त कर लेते हैं।

व्यापक रूप में क्वड समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा हल निम्न प्रकार होगा

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Rightarrow \frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

x के गुणांक $\frac{b}{a}$ को 2 से भाग देने पर $\frac{b}{a} \times \frac{1}{2} = \frac{b}{2a}$

$$\text{अतः } x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + 0$$

$$\Rightarrow (x)^2 + 2x \times \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow (x)^2 + 2x \times \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x + \frac{b}{2a})^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad [\text{यदि } b^2 - 4ac \geq 0]$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

अतः $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ और

$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ है यदि $b^2 - 4ac \geq 0$ है। यदि $b^2 - 4ac$

यदि $b^2 - 4ac < 0$ हो तो समीकरण के मूल वास्तविक नहीं होते हैं, क्योंकि तब $b^2 - 4ac$ का वर्गमूल कोई वास्तविक संख्या नहीं हो सकती।
द्विघात समीकरण के मूल प्राप्त करने के इस सूत्र को अर्थात् $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ को द्विघात सूत्र कहते हैं।

उदाहरण-1 - $2x^2 - 7x + 3 = 0$ का पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा हल प्राप्त कीजिए।

हल: $2x^2 - 7x + 3 = 0$

$\Rightarrow \frac{2x^2}{2} - \frac{7x}{2} + \frac{3}{2} = \frac{0}{2}$

$x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0$

x का गुणांक $-\frac{7}{2}$ को 2 से भाग देने पर $-\frac{7}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{7}{4}$

$(x)^2 - \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = 0 + \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{3}{2}$

$(x)^2 + 2 \times x \times \frac{7}{4} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} = \frac{49}{16}$

$(x - \frac{7}{4})^2 = \frac{49}{16} - \frac{3}{2}$

$(x - \frac{7}{4})^2 = \frac{49 - 24}{16}$

$(x - \frac{7}{4})^2 = \frac{25}{16}$

$\sqrt{(x - \frac{7}{4})^2} = \sqrt{\frac{25}{16}}$

$$x - \frac{7}{4} = \pm \frac{5}{4}$$

$$\text{तब } x - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}, \quad x - \frac{7}{4} = -\frac{5}{4}$$

$$x = \frac{5}{4} + \frac{7}{4}, \quad x = -\frac{5}{4} + \frac{7}{4}$$

$$x = \frac{5+7}{4}, \quad x = \frac{-5+7}{4}$$

$$x = \frac{12}{4}, \quad x = \frac{2}{4}$$

$$x = 3, \quad x = \frac{1}{2}$$

अतः समीकरण के मूल = $3, \frac{1}{2}$

प्रश्नावली:

पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा निम्न द्विघात समीकरणों के मूल ज्ञात कीजिए,

(1) $2x^2 - 5x + 3 = 0$

(2) $6x^2 - x - 2 = 0$

(3) $x^2 - 4x + 5 = 0$

(4) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

(5) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

द्विघात समीकरणों का सीधे द्विघाती सूत्र का प्रयोग कर भी हल ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण: द्विघाती सूत्र का प्रयोग कर $2x^2 - 7x + 3 = 0$ के हल ज्ञात कीजिए,

हल: $2x^2 - 7x + 3 = 0$ को $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर $a = 2, b = -7, c = 3$

द्विघाती सूत्र का प्रयोग करने पर

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm 5}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{7+5}{4}, \quad x = \frac{7-5}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{12}{4} \quad x = \frac{2}{4}$$

$$\Rightarrow x = 3 \quad x = \frac{1}{2}$$

अतः समीकरण के मूल = 3, $\frac{1}{2}$

प्रश्नावली:

द्विघाती सूत्र का प्रयोग कर निम्न समीकरणों के हल प्राप्त कीजिए।

(1) $2x^2 + 5x - 7 = 0$ (2) $3x^2 + 7x - 10 = 0$

द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति :- द्विघात समीकरण

के मूल $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ द्वारा देय होते हैं,

यदि $b^2 - 4ac > 0$ हो तो हम दो भिन्न वास्तविक मूल

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{तथा} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

यदि $b^2 - 4ac = 0$ हो तब $x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$

अर्थात् $x = \frac{-b}{2a}$ तथा $x = \frac{-b}{2a}$ है।

8

अतः समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के दोनों मूल $-b/2a$ हैं
अर्थात् $b^2-4ac=0$ होने पर द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$
के दो-बराबर व वास्तविक मूल हैं।

यदि $b^2-4ac < 0$ हो तो ऐसी कोई वास्तविक संख्या
नहीं है जिसका वर्ग b^2-4ac अर्थात् 0 से छोटी संख्या हो,
अतः इस स्थिति में समीकरण के मूल वास्तविक नहीं होंगे,
क्योंकि b^2-4ac का मान ही मूलों के वास्तविक होने
व न होने का निर्धारण करता है, b^2-4ac को द्विघात समीकरण
का विविक्तकर कहते हैं।

अतः द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के में यदि

- (i) $b^2-4ac > 0$ हो तो समीकरण के मूल वास्तविक व भिन्न-भिन्न होंगे।
- (ii) $b^2-4ac = 0$ हो तो समीकरण के मूल वास्तविक व समान होंगे।
- (iii) $b^2-4ac < 0$ हो तो समीकरण के मूल वास्तविक नहीं होंगे।

उदाहरण - द्विघात समीकरण $2x^2-3x+5=0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया समीकरण $2x^2-3x+5=0$

समीकरण की व्यापक द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ से तुलना करने पर $a=2, b=-3, c=5$

विविक्तकर $D=b^2-4ac$

$$= (-3)^2 - 4 \times 2 \times 5$$

$$= 9 - 40$$

$$= -31$$

अतः b^2-4ac ऋणात्मक है अर्थात् $b^2-4ac < 0$

अतः समीकरण के मूल वास्तविक नहीं हैं।

अभ्यास के लिए प्रश्न

निम्न द्विघात समीकरणों के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए,

$$(1) 4x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (2) 3x^2 - 4x - 6 = 0$$

$$(3) x^2 - 8x + 16 = 0 \quad (4) 4x^2 - 4x - 15 = 0$$

हमारे आस-पास के परिवेश की अनेक स्थितियों व गणित के विभिन्न क्षेत्रों में द्विघात समीकरण प्रयुक्त होते हैं,

उदाहरण:- दो क्रमागत घनात्मक पूर्णाकों के वर्गों का योग 365 है, संख्याएँ ज्ञात कीजिए,

माना एक घन पूर्णांक = x

इसके क्रमागत घन पूर्णांक इससे 1 अधिक अर्थात् $x+1$ होगा

प्रश्न के अनुसार दो क्रमागत घन पूर्णाकों के वर्गों का योग = 365

$$\therefore (x)^2 + (x+1)^2 = 365$$

$$\text{या } x^2 + x^2 + 1^2 + 2x \times x \times 1 = 365 \quad [\text{सब } (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \text{ से}]$$

$$2x^2 + 1 + 2x - 365 = 0$$

$$2x^2 + 2x - 364 = 0$$

$$2[x^2 + x - 182] = 0$$

यह एक द्विघात समीकरण है इसे अब उपयुक्त विधि से हल करेंगे

$$x^2 + x - 182 = 0$$

$$\text{या } x^2 + 14x - 13x - 182 = 0 \quad [\text{क्योंकि } 14 \times x - 13x = 182x^2 = x^2x - 182]$$

$$\text{या } x(x+14) - 13(x+14) = 0$$

$$\text{या } (x+14)(x-13) = 0$$

$$\text{या तो } x+14=0 \text{ या } x-13=0$$

$$x = 0-14, \quad x = 0+13$$

$$x = -14, \quad x = 13$$

$\therefore x$ एक घनात्मक पूर्णांक है इसलिए x का मान -14

नहीं हो सकता लंब $x=13$

अतः एक घनात्मक पूर्णांक = 13

इसके क्रमागत घनात्मक पूर्णांक = $13+1=14$

अभ्यास के लिए प्रश्न:

1- एक समकोण त्रिभुज की ऊंचाई उसके आधार से 7 सेमी कम है, यदि कर्ण 13 सेमी हो अन्य दो भुजाएँ ज्ञात कीजिए,

2- एक आम की बगिया की लम्बाई उसकी चौड़ाई की दुगुनी है, यदि बगिया का क्षेत्रफल 800 वर्ग मी. हो तो उसकी लम्बाई व चौड़ाई ज्ञात कीजिए,

3- एक आयताकार पार्क का परिमाण 70 मीटर तथा क्षेत्रफल 300 वर्ग मी. है, पार्क की लम्बाई व चौड़ाई ज्ञात कीजिए,

4- एक कुटीर उद्योग एक दिन में कुछ बर्तनों का निर्माण करता है, यदि एक विशेष दिन व निर्मित प्रत्येक बर्तन की निर्माण लागत (रुपये में) उस दिन निर्माण किये गये कुल बर्तनों की संख्या के दोगुने से 3 अधिक थी, यदि उस दिन की कुल निर्माण लागत 90 रु थी तो उस दिन निर्मित बर्तनों की संख्या व प्रत्येक बर्तन की लागत ज्ञात कीजिए,

$$0 = 581 - x^2$$

$$0 = 581 - x + x^2$$

$$0 = 581 - x^2 - x + x^2$$

$$0 = (581 - x^2) - (x - x^2)$$

$$0 = (581 - x)(581 + x)$$

$$581 - x = 0 \implies 581 = x$$

$$581 + x = 0 \implies 581 = -x$$