Type equation here.**वृत्त से सम्बन्धित क्षेत्रफल (कक्षा – 10)**

वृत्त के भाग–

हम जानते है कि वृत्त का मध्य बिन्दु केन्द्र होता है, वृत्त की सीमा रेखा को परिधि कहते है।

केन्द्र– वृत्त का मध्य बिन्दु

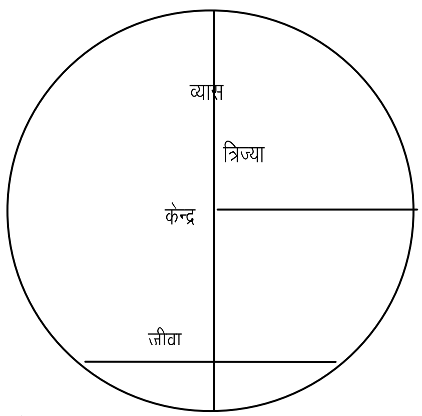
परिधि– वृत्त की सीमा रेखा

त्रिज्या– केन्द्र को परिधि से मिलाने वाली रेखा

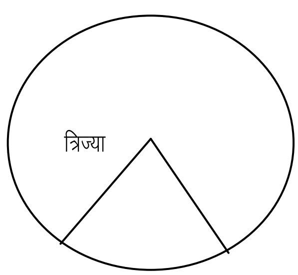
व्यास– वह रेखा जो परिधि के दो बिन्दुओं को मिलाती है और केन्द्र से होकर जाती है

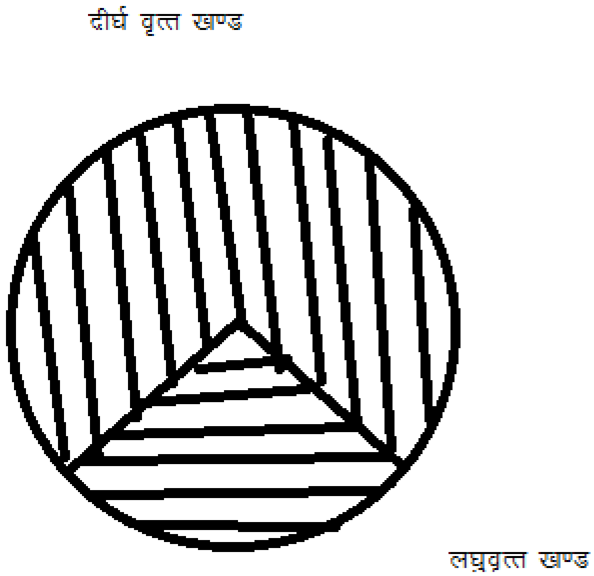
वृत्त का क्षेत्रफल – πr^2 **वृत्त की परिधि–** $2\pi r$

अब हम वृत्त को अलग – अलग भागो में बाटैगे वृत्त को भागो में बॉटने के लिये हम त्रिज्या व जीवा की सहायता लेगे ।



सर्वप्रथम त्रिज्या की सहायता से





हम देख रहे है कि त्रिज्या की सहायता से वृत्त दो भागो में बॅट चुका है । यह भाग वृत्त के त्रिज्यखण्ड कहलाते है। छोटा हिस्सा लघु त्रिज्यखण्ड व बड़ा हिस्सा दीर्घ त्रिज्यखण्ड कहलाता है

त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360}\pi r^2$ (πr^2वृत्त का क्षेत्रफल है θ त्रिज्याओ का मध्य का कोण है)

त्रिज्यखण्ड एक चाप से बना होता है अतः चाप = $\frac{\theta}{360} * 2\pi\mathrm{r}$ ($2\pi\mathrm{r}$ परिधि है चाप परिधि काएक भाग होता है θ त्रिज्याओ का मध्य का कोण है)

अब हम सर्वप्रथम इन चार सूत्रो –

वृत्त का क्षेत्रफल – πr^2 वृत्त की परिधि = $2\pi\mathrm{r}$

त्रिज्यखण्ड का चाप = $\frac{\theta}{360} * 2\pi\mathrm{r}$, त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360}\pi r^2$

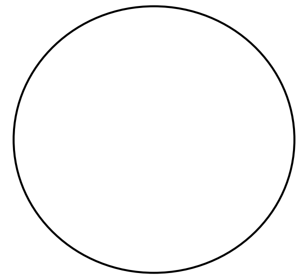
पर आधारित प्रश्नो को समझेगे

प्र01– दो वृत्तो की त्रिज्याऐ 19 सेन्टीमीटर व 9 सेन्टीमीटर है उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिनकी परिधि इन दोनो वृत्तो की परिधियों के योग के बराबर है?

उ0– सर्वप्रथम वृत्तो की परिधियॉ $2\pi\mathrm{r}1$ और $2\pi\mathrm{r}2$ मान लेते है जहॉ r1 और r2 वृत्तो की त्रिज्याएँ है अब परिधियो का मान ज्ञात करते है

पहले वृत्त की परिधि $2\pi\mathrm{r}1 = 2\pi \times 19 = 38\pi$

दूसरे वृत्त की परिधि $2\pi r2 = 2\pi \times 9 = 18\pi$



वृत्त की परिधि = पहले वृत्त की परिधि + दूसरे वृत्त की परिधि

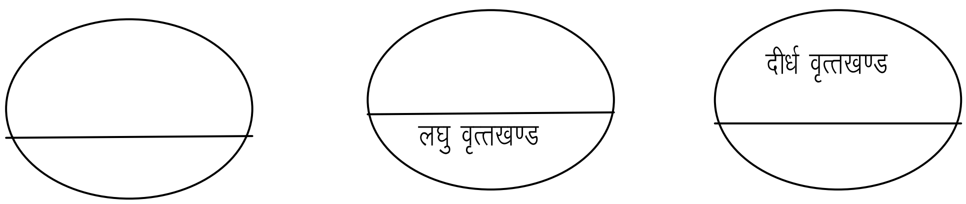
माना परिधि $2\pi r = 38\pi + 18\pi$

$r = 28$

वृत्त की त्रिज्या = 28 सेन्टीमीटर

इसी प्रकार परिधि के स्थान पर वृत्त के क्षेत्रफल का सूत्र लिखकर इसी के समान प्रश्न हल किया जा सकता है

पहले भाग में हमें वृत्त की त्रिज्याओ की सहायता से बॉटा तो हमें लघु व दीर्घ त्रिज्यखण्ड प्राप्त हुए । अब हम वृत्त को जीवा की सहायता से बाटेंगे।

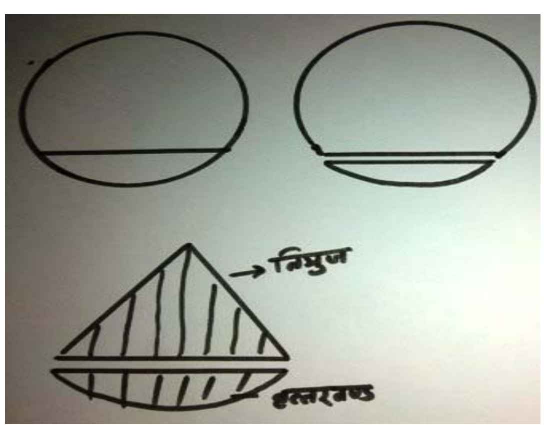


जीवा द्वारा वृत्त पुनः दो भागो में बट जाता है अब बटे भाग पूर्व में त्रिज्या द्वारा बंटे भागो सं पूर्णतया अलग है। यह भाग वृत्तखण्ड कहलाते है । जिन्हे दीर्घ तथा लघु वृत्तखण्ड कहते है।

वृत्तखण्डो का क्षेत्रफल त्रिज्यखण्डो की सहायता से निकाला जाता है।

हम वृत्तखण्ड को त्रिज्यखण्ड व त्रिभुज के क्षेत्रफल से ज्ञात करते है

इसे इस प्रकार समझना होगा।



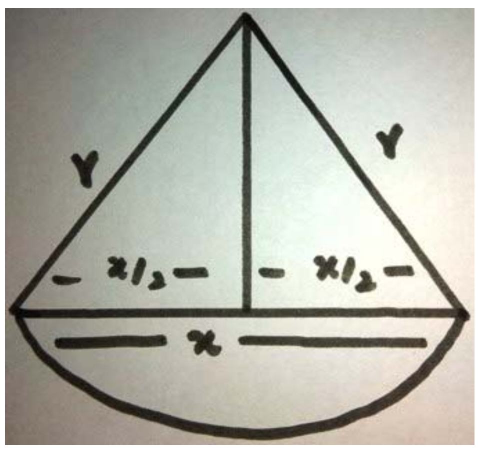
यदि हम सम्पूर्ण त्रिज्यखण्ड से त्रिभुज को अलग कर दें तो हमारे पास केवल वृत्तखण्ड शेष रहेगा अतः सूत्र इस प्रकार होगा ।

लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल = लघु त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल –$\triangle$का क्षेत्रफल

दीर्घ वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल –लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल

इस सुत्र का प्रयोग करने के लिये हमे त्रिज्यखण्ड व वृत्त का क्षेत्रफल पूर्व में ज्ञात है। अब हमें विभिन्न प्रकार के $\triangle$के क्षेत्रफल के सुत्र याद होने चाहिए

1– यदि जीवा का मान ज्ञात हो तो केन्द्र से उस पर लम्ब डालकर पाईथागोरस प्रमेय की सहायता से लम्ब का मान निकाला जा सकता है। तथा उसके बाद त्रिभुज का क्षेत्रफल = 1/2 आ0 X ऊँ0 का प्रयोग करके क्षेत्रफल ज्ञात किया जा सकता है



2– यदि जीवा ज्ञात नही हो केवल त्रिज्या ज्ञात हो तो त्रिज्या व त्रिज्यखण्ड के मध्य के कोण द्वारा निम्न सूत्र की सहायता से त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात किया जा सकता है

त्रिभुज का क्षेत्रफल = 1/2 $r^2 Sin\theta$

3– यदि वृत्त की त्रिज्या व जीवा का मान समान हो तो बना हुआ $\triangle$ एक समबाहु $\triangle$ होगा जिसका

क्षेत्रफल $= a^2\sqrt{3}/4$

जहाँ a त्रिभुज की भुजा है से ज्ञात किया जा सकता है

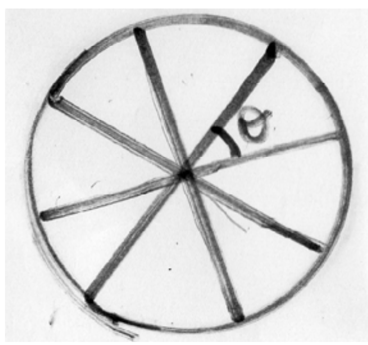
अब हमें विभिन्न प्रकार के प्रश्नो में त्रिज्यखण्ड व वृत्तखण्ड की आकृतियॉ पहचाननी होगी। अभ्यास 12.2 के प्रश्नों में विभिन्न प्रकार की आकृतियॉ दी गई है जिनमें हमने त्रिज्यखण्ड व वृत्तखण्ड पहचानकर उनके मध्य का कोण θ व चिज्या पहचाननी होगी

यदि कोई वृत्ताकार आकृति 10 बराबर त्रिज्यखण्डो में बंटी है तो किसी एक त्रिज्यखण्ड के मध्य का कोण इस प्रकार ज्ञात करना होगा– मध्य में बना कुल कोण = 360°

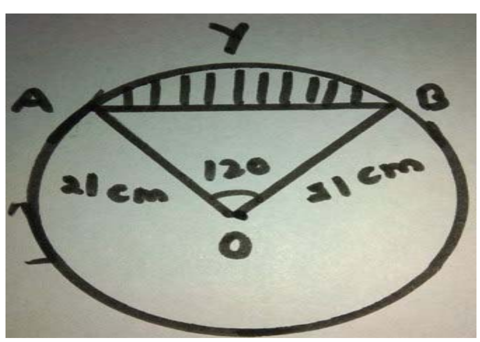
10 भागो में एक भाग का कोण = 360 / 10 = 36

(प्रश्न न0 –9 में प्रयोग करें)

प्रश्न न0 10 हेतु $\theta = 360/8 = 45^\circ$ $\theta = 45^\circ$



प्र0– आकृति में वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए? जहॉ $\angle$ AOB = 120° r = 21 सेन्टीमीटर

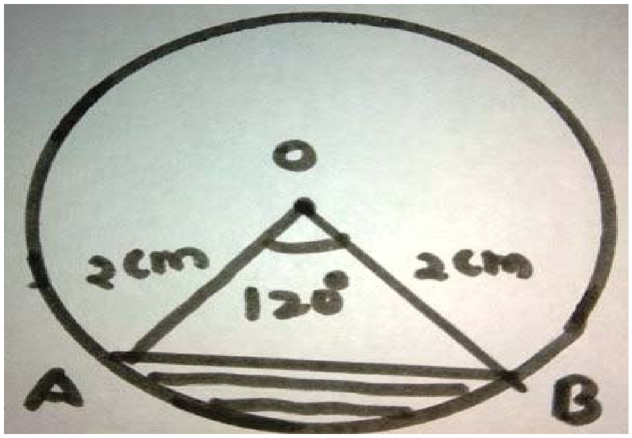


उ0– चित्र में वृत्तखण्ड AYB का क्षेत्रफल = त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल – ΔAOB का क्षेत्रफल

$$= \frac{\theta}{360}\pi r^2 - \frac{r^2}{2}Sin\theta$$

$\theta = 120\, r = 21\, cm$ रखकर मान ज्ञात करेगे ।

प्र0– दी गयी आकृति में लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ?



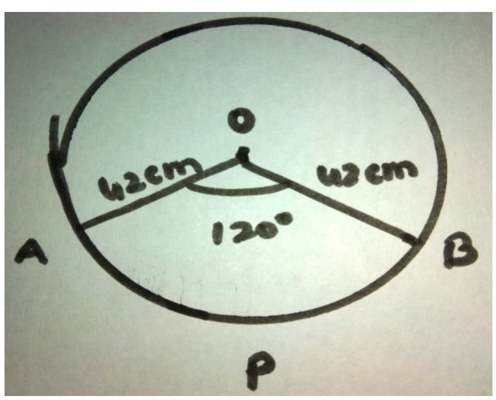
यदि $\angle AOB = 120^\circ$ OA= 2 सेन्टीमीटर

उ0– लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल =त्रिज्यखण्ड AOB का क्षेत्रफल – त्रिभुज AOB का क्षेत्रफल

$$= \frac{\theta}{360}\pi r^2 - \frac{r^2}{2}Sin\theta$$

यहॉ पर r = 2 सेन्टीमीटर व $\theta = 120^\circ$ रखकर मान ज्ञात कीजिए

प्र0– दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात किजिए जहॉ $\boldsymbol{\theta} = 120^\circ$ लघु त्रिज्यखण्ड का कोण है व r = 42 सेन्टीमीटर

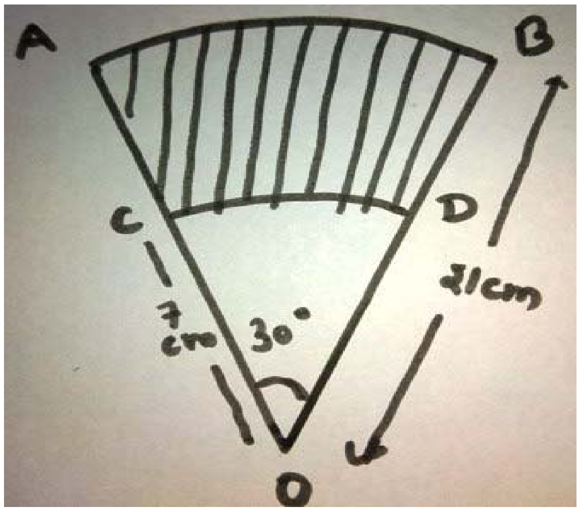


उ0– त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल = θ / 360 πr^2

यहॉ पर त्रिज्यखण्ड दीर्घ है अतः कोण $\theta = 360 - \theta$

अब सूत्र में θ = 360–120 =240°व r = 42 सेन्टीमीटर रखकर हल करें।

प्र0– दी गई आकृति में AB व CD केन्द्र है व तथा त्रिज्याऍ में सेन्टीमीटर व 7 सेन्टीमीटर वाले दो संकेन्द्रीय वृत्तो के क्रमशः दो चाप है । यदि ∠AOB= 30° तो छायाकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ?



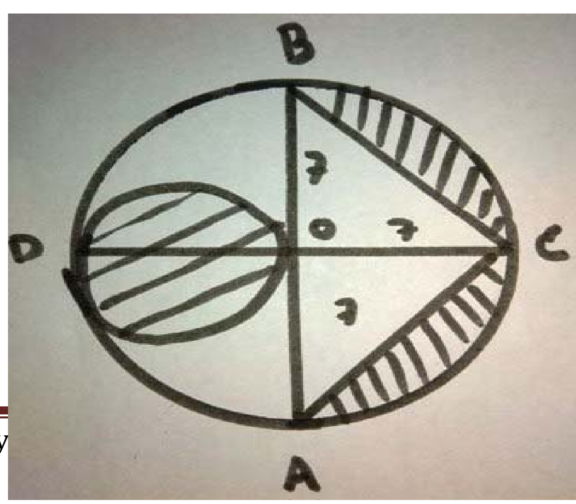
उ0–दोनो एक ही केन्द्र O से बने वृत्त के चाप है जिनकी आकृतियॉ त्रिज्यखण्ड के समान है पहला बडा त्रिज्यखण्ड AOB व दूसरा छोटा त्रिज्यखण्ड COB है ।

अतः छायाकित भाग बड़े त्रिज्यखण्ड से छोटे त्रिज्यखण्ड को घटाने पर प्राप्त होगा

अतः छांयाकित भाग का क्षेत्रफल= $\frac{\theta}{360}\pi\, r1^2 - \frac{\theta}{360}\pi\, r2^2$

r1 =21 r2= 7 और θ = 30° रखकर हल करें।

प्र0 – दी गयी आकृति में AB और CD केन्द्र O वाले एक वृत्त के दो परस्पर लम्ब व्यास है यदि OD छोटे वृत्त का व्यास है तथा OA = 7 सेमी0 तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें?



उ0– चित्र में देखने से ज्ञात होता है कि छायाकित भाग उक छोटा वृत्त एवं दो वृत्तखण्ड है ।

छोटे वृत्त का क्षेत्रफल हमें ज्ञात है πr^2 r = त्रिज्या यहॉ r = $7/2$

वृत्तखण्ड को देखने पर हमें यह पता चलता है कि यह एक अर्द्ववृत्त AOCB का भाग है तथा इसमें एक त्रिभुज ABC भी है अतः छायाकित वृत्तखण्ड हमें अर्द्ववृत्त से त्रिभुज के क्षेत्रफल को घटाकर प्राप्त हो जायेगा

वृत्तखण्ड का क्षेंत्रफल =$\frac{\pi r2}{2} - \frac{1}{2}$ आ0 X उ0

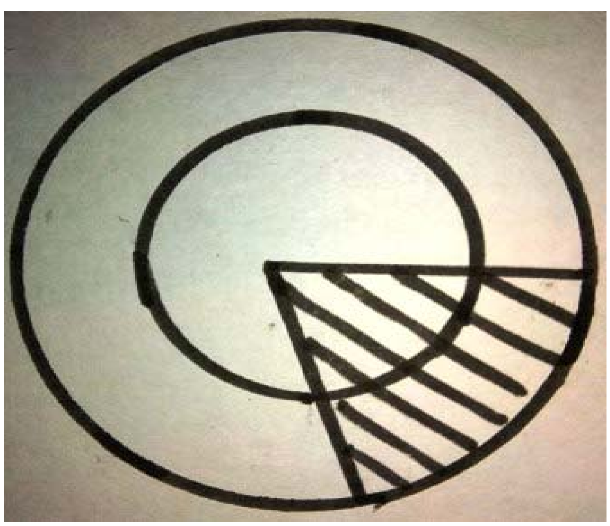
यहॉ r = 7 सेन्टीमीटर आ0 = 14 सेन्टीमीटर ऊॅचाई = 7 सेन्टीमीटर

छायाकित भाग का कुल क्षेत्रफल = छोटे वृत्त का क्षेत्रफल + वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

समतल आकृतियो के संयोजनो के क्षेत्रफल–

इन प्रश्नों को हल करने के लिए प्रत्येक आकति को उन आकृतियों में बॉटिये जिन्हें आप स्वय पहचानते है । आप सब तक वर्ग , आयत, त्रिभुज , चतुर्भुज , वृत्त , त्रिज्यखण्ड आदि आकृतियों को जानते है। इनके क्षेत्रफल व परिमाप के सूत्रो से परिचित है।

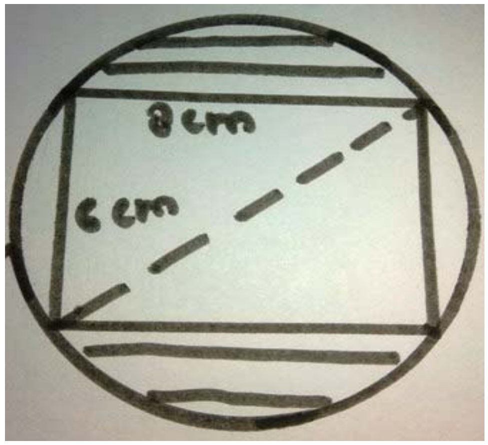
उदाहरण के लिये



इस आकृति में दो वृत्त है परन्तु छायाकित भाग एक त्रिज्यखण्ड को सहायता से बनाया गया है।

इसी प्रकार अब आपको प्रश्न में आकृत्तियो को पहचानकार यह करना है कि छायाकित भाग किन आकृतियों को जोडकर या घटाकर प्राप्त किया जा सकता है

प्र0– 8 सेमी0 X6 सेमी0 माप का एक आयात एक वृत्त के अन्तर्गत खीचा गया है। जैसा कि चित्र में दिखया गया है छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ?

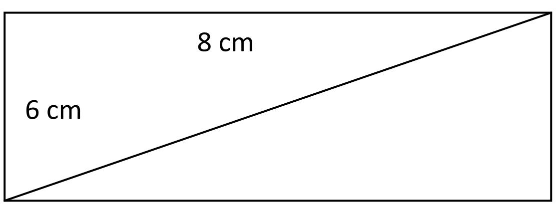


उ0–छांयाकित भाग वृत्त से आयात को घटाने पर प्राप्त होगा ।

छायांकित भाग का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल – आयत का क्षेत्रफल

वृत्त के क्षेत्रफल के लिये त्रिज्या होना जरूरी है।

अब हम आयत को समझते है



ल0– 8 सेमी0 चौ0– 6 सेमी0

यदि हम आयत का विकर्ण ज्ञात कर लेते है तो यह वृत्त का व्यास होगा। अतः पाईथागोरस प्रमेय से

(विकर्ण $)^2 = (6)^2 + (8)^2$

$36+64= 100=$ 10 सेमी0

अतः वृत्त का व्यास = 10 सेमी0 त्रिज्या = 5 सेमी0

अब हमें छायाकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करने योग्य सभी मान ज्ञात हो गये है ।

छांयाकित भाग का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल – आयत का क्षेत्रफल

= $\pi r^2 -$ ल0 x चौ0

= 3.14 x (5)2–6 x 8

= 3.14 x25 – 48

= 78.50–48

= 30.50 वर्ग सेमी