कक्षा – 10 गणित

वास्तविक संख्याएं [Real Number]

(1) वास्तविक संख्याएं –(Real Number) - सभी पूर्णांको , प्राकृत संख्याओं, पूर्ण संख्याओं परिमेय संख्याएं तथा अपरिमेय संख्या के समूह को वास्तविक संख्याएं कहते है।

(i) प्राकृत संख्याएँ – जिनका प्रयोग गिनती गिनने में किया जाता है, जैसे , 1,2,3,4,5 - - - - - - प्राकृत संख्याए कहलाती है।

(ii) पूर्ण संख्याएँ – प्राकृत संख्याएँ एवं शून्य (0) के संग्रह को पूर्णसंख्या कहते है जैसे (0, 1, 2, 3, 4 . . . . . .)

(iii) पूर्णांक – प्राकृत संख्याएं शून्य एव ऋणात्मक संख्याओं के समूह को पूर्णांक कहते है, जैसे– (1, 2, 3, 0 -1, -2 -3 आदि)

(iv) परिमेय संख्याएं –(1) जिसे हम भिन्न (p/q) के रूप में लिख सकते है जहाँ p और q दोनों पूर्णांक है तथा हर शून्य नही $q \neq 0$

जैसे– 1, 2, 3, $2/3$ 0, $\frac{-3}{2}$, $-\frac{5}{7}$ -1, -2 आदि।

(v) अपरिमेय संख्या – ऐसी संख्या या भिन्न जिसका प्रसार करने पर दशमलव प्रसार असांत अनावर्ती हो, अपरिमेय संख्या होगी।

जैसे - 1·4142 . . . , $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, तथा $\sqrt{\pi}$ ($\because \pi$ अभाज्य संख्या)

(2) –दी संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात करना।–

अभाज्य गुणनखण्ड, 2, 3, 5, 7, 11 13 - - आदि है,

किसी दी हुई संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम सबसे छोटी अभाज्य संख्या से विभाजित करते हैं जबतक शेष न रह जाय क्रमश: अगली अभाज्य संख्या से विभाजित करते है यदि पूर्व संख्या से विभाजित नही हो तो .

जैसे - 33 के अभाज्य गुणनखण्ड

3	33
11	11
	1

33 = 3×11

इसे 11×3 भी लिख सकते है

उदाहरण - निम्न के अभाज्य गुणनखण्ड कीजिए -

(i) 128 (ii) 140

हल :

2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

अभाज्य गुणनखण्ड - $128 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$

2	140
2	70
5	35
7	7
	1

अभाज्य गुणनखण्ड

$140 = 2\times2\times5\times7$

अभाज्य गुणनखण्ड विधि म० स० ल० स० ज्ञात करना एवं संबन्ध -

(i) म० स० (HCF) विधि - (i) सर्वप्रथम दो संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड करते हैं।
(ii) म०स० ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम उभयनिष्ठ (जो दोनों में शामिल) को लेते हैं तत्पश्चात म० स० ज्ञात करते हैं।

जैसे - 128 तथा 140 का म०स०

$128 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$
$140 = 2\times2\times5\times7$

म०स० $= 2\times2 = 4$

(ii) इसी प्रकार ल०स० भी ज्ञात करते हैं
ल०स० LCM ज्ञात करने के लिए सभी उभयनिष्ठ गुणनखण्डों तथा अन्य गुणनखण्ड भी लेते हैं

जैसे 128 और 140 का ल०स० — $128 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$
$140 = 2\times2\times5\times7$

ल०स० $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times5\times7$
ल०स० $= 4480$

ल०स० तथा म० स० में संबन्ध -

$$\text{ल० स०} = \frac{\text{पहली संख्या} \times \text{दूसरी संख्या}}{\text{म० स०}}$$

किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांको A तथा B तथा ②
म॰ स॰ (HCF) और ल॰स॰ (LCM) में सम्बन्ध —

सूत्र- ल॰स॰ × म॰स॰ = पहलापद × दूसरापद

$$\boxed{LCM \times HCF = A \times B}$$

नोट: इस सूत्र से हम कोई भी एक अज्ञात राशि ज्ञात कर सकते हैं

जैसे - दो धनात्मक पूर्णांक 96 और 404 का HCF 4 है तो LCM ज्ञात कीजिए

हल $A = 96$ $B = 404$, $HCF = 4$

तो $LCM = \frac{A \times B}{HCF} = \frac{96 \times 404}{4} = 9696$

※ परिमेय और अपरिमेय संख्याएं ※

(1) परिमेय संख्याएँ – ऐसी सभी संख्याएं जैसे शून्य धनात्मक ऋण सम, विषम, भाज्य और अभाज्य संख्याएं जिनको हम भिन्न के रूप में (p/q) लिख सकते हैं परिमेय संख्याएं कहलाती है. जैसे - $0, 1, \frac{1}{2}, 4, -3/5$ ... आदि

नोट- भिन्न का हर शून्य न हो।

(a) ऐसी भिन्न जिसका प्रसार करने पर मान सांत हो, अर्थात भाग पूरा-पूरा चले जाय भी परिमेय संख्या होगी।

(b) ऐसी भिन्न जिसका दशमलव प्रसार संख्या या संख्याओं के रूप में आवृत्ति हो भी एक परिमेय संख्या होगी
जैसे (3.333.... या, 43.123 123123....)
या → $43.\overline{123}$

(c) ऐसी भिन्न जिसका हर 2 या 5 या 10 की घात या 2, 5, 10 के रूप में हो।

अपरिमेय संख्या- ऐसी संख्या जिन्हें हम भिन्न के रूप में भी लिख सकते हैं परन्तु प्रसार करने पर दशमलव प्रसार असांत और अनावृत्ती हो.

जैसे - 0.120120012000.......

$\sqrt{2} = 1.4142135624$ .... असांत अनावर्ती

Ex. $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है

प्रथम विधि = $\sqrt{2}$ का प्रसार या वर्गमूल ज्ञात करने पर

$$\sqrt{2.000000} = 1.414213..$$

प्रसार असांत अनावर्ती है अतः यह अपरिमेय संख्या है।

	1.4142
1	2.00 00 00 00 00
1	1
24	100
4	96
281	400
1	281
2824	11900
4	11296
28282	60400
× 2	

द्वितीय विधि:

(i) सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है

माना $\sqrt{2} = p/q$ यहाँ p और q पूर्णसंख्या हैं p और q का 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ या $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$

$p = q\sqrt{2}$ दोनों ओर वर्ग करने पर

$p^2 = q^2 \times 2$ —(i) या p^2 2 से विभाज्य है तो p भी 2 से विभाज्य होगा

माना $p = 2r \Rightarrow p^2 = 4r^2$ (i) से $2q^2 = 4r^2$

या $q^2 = 2r^2$ q^2 भी 2 से विभाज्य है परन्तु p और q का कोई सार्व भाजक नहीं है जिसे हम पूर्व में ही मान चुके हैं

अतः हमारी कल्पना गलत है। $\therefore$ $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(ii) $6+\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल - माना $6+\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः $6+\sqrt{2} = p/q$ p और q दोनों सहअभाज्य पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} - 6$$

$\frac{p}{q} - 6 = \sqrt{2}$ p/q सहपूर्णांक और परिमेय संख्या है 6 भी परिमेय संख्या है

अतः $\frac{p}{q} - 6$ भी परिमेय संख्या है

जो $\sqrt{2}$ के बराबर है या दोनों बराबर है ~~लेकिन √2 अपरिमेय है~~

दोनों बराबर तब होंगे जब $\sqrt{2}$ भी परिमेय संख्या हो जो कल्पना

सांत और असांत दशमल प्रसार.

(1) सान्त दशमलव प्रसार - ऐसी भिन्न जिसका दशमलव प्रसार करने पर भाग पूरा-पूरा चले जाय, या जिसका हर 2 और 5 की घात के रूप में अथवा 2, 5, 10 के रूप मे हो सांत दशमलव प्रसार कहलाता है।

जैसे (i) $\frac{17}{8} = \frac{17}{2\times2\times2} = \frac{17}{2^3}$ हर 2 की घात के रूप में है

(ii) $\frac{13}{3125} = \frac{13}{5\times5\times5\times5\times5} = \frac{13}{5^5}$ 5 की घात के रूप में है

(iii) $\frac{7}{1000} = \frac{7}{10\times10\times10} = \frac{7}{2\times2\times2\times5\times5\times5} = \frac{7}{2^3\times5^3}$ 2 और 5 की घात

(ii) असांत दशमलव प्रसार - ऐसी भिन्न जिसका दशमलव प्रसार करने पर भाग पूरा-2 न जाय या असांत अनावृती हो, या हर 2, 5, 10 की घात न हो असांत दशमलव प्रसार होगा।

जैसे - $\frac{29}{343} = \frac{29}{7\times7\times7}$ असांत दशमलव प्रसार हर 7 के रूप में है

$\frac{22}{7} = 3.142857\ldots$ असांत अनावृती (दशमलव प्रसार असांत

यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका

इस विधि का प्रयोग दो धनात्मक पूर्ण संख्याओं का म॰स॰ (HCF) ज्ञात करने में किया जाता है,

(1) सर्व प्रथम दो संख्याओं में बड़ी और छोटी संख्याओं का म॰स॰ ज्ञात करने हेतु बड़ी संख्या को बराबर के बायीं ओर लेकर छोटी संख्या को ऐसी संख्या से गुणा करते हैं कि गुणनफल संख्या से छोटा हो या संख्या के बराबर हो जाय, या इस क्रिया को लगातार जारी रखते हैं कि शेषफल शून्य न हो जाय, यदि जहाँ शेषफल शून्य हो तो भाजक ही म॰स॰ होता है। जैसे 196 और 38220 का म॰स॰

38220 > 196 यू॰ वि॰ प्रमेयिका का प्रयोग से

... 196 × 195 + 0 ... शेषफल शून्य है

उदाहरण (2) 135 और 225 का म०स० यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका के प्रयोग से

(1) 135 और 225 में

225 > 135 से { < छोटा है, > बड़ा है }

225 = 135×1 + 90 यू० वि० प्रमेयिका से

यहाँ शेषफल शून्य नहीं है पुनः प्रयोग से (135 और 90 में)

135 = 90×1 + 45 शेषफल शून्य नहीं है पुनः 90 और 45 में)

90 = 45×2 + 0 यहाँ शेषफल शून्य है अतः प्रक्रिया समाप्त हुयी।

यहाँ भाजक 45 है। म०स० = 45

परीक्षोपयोगी प्रश्न

प्र० (1) निम्न में कौनसा प्रश्न सांत दशमलव प्रसार है कौन सा असांत दशमलव प्रसार।

(i) $\frac{15}{1600}$, $\frac{6}{15}$, $\frac{129}{2^2\times5^7}$, $\frac{23}{3^2\times2^5}$, $\frac{35}{50}$ आदि।

प्र० (2) अभाज्य गुणनखण्ड कीजिए - 140, 156 135, आदि

प्र० (3) HCF और LCM ज्ञात कीजिए -

(i) 12, 15 (ii) 26, 91 (iii)

प्र० (3) सिद्ध करो कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है

प्र० (4) यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग कर म०स० ज्ञात कीजिए -

(i) 255 और 102, (ii) 867 और 255

महेश चन्द्र द्विवेदी प्रवक्ता

रा० इ० का० भड़कटिया, पिथौरागढ़