

द्विक 12

वक्र; वृ

संख्याओं या फलनों की आयताकार सारणी को आव्यूह कहते हैं। इन संख्याओं या फलनों को आव्यूह के अवयव कहते हैं। आव्यूह को अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों द्वारा व्यक्त करते हैं।

उदाहरण- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 7 & -6 \end{pmatrix}$

क्षैतिज रेखाएँ आव्यूह की पंक्तियाँ और उर्ध्व रेखाएँ आव्यूह के स्तम्भ कहलाते हैं।

वक्र; वृ dh dksV

m पंक्तियों तथा n स्तम्भों वाले किसी आव्यूह को $m \times n$ कोटि का आव्यूह कहते हैं। जैसे-

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

वक्र; वृ ds i dksj

1- i fDr v क्र; वृ- एक आव्यूह पंक्ति आव्यूह कहलाता है यदि उसमें केवल एक

पंक्ति होती है।

उदाहरण- $A = [-3 \ 5 \ 7 \ 2]_{1 \times 4}$

2- Lr EHk v क्र; वृ- एक आव्यूह स्तम्भ आव्यूह कहलाता है यदि उसमें केवल एक

स्तम्भ होता है।

उदाहरण- $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$

3- $n \times n$ आव्यूह A - एक आव्यूह जिसमें पंक्तियों की संख्या स्तम्भों की संख्या के समान होती है, उसे वर्ग आव्यूह कहते हैं।

उदाहरण-
$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ \frac{3}{4} & 4\sqrt{2} & 5 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

4- $n \times n$ विकर्ण आव्यूह A - एक वर्ग आव्यूह विकर्ण आव्यूह कहलाता है यदि विकर्ण के अतिरिक्त इसके अन्य सभी अवयव शून्य होते हैं।

उदाहरण-
$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

5- $n \times n$ विकर्ण आव्यूह A - एक विकर्ण आव्यूह अदिश आव्यूह कहलाता है यदि इसके विकर्ण के अवयव समान होते हैं।

उदाहरण-
$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

6- $n \times n$ इकाई आव्यूह I - एक वर्ग आव्यूह जिसके विकर्ण के सभी अवयव 1 होते हैं, तथा शेष अन्य सभी अवयव शून्य होते हैं, तत्समक या इकाई आव्यूह कहलाता है।

उदाहरण-
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7- $n \times n$ शून्य आव्यूह O - एक आव्यूह शून्य आव्यूह या रिक्त आव्यूह कहलाता है यदि इसके सभी अवयव शून्य हों।

उदाहरण-
$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8- किसी आव्यूह की पंक्तियों तथा स्तम्भों का परस्पर विनिमय करने से प्राप्त होने वाले आव्यूह को दिये गये आव्यूह का परिवर्त कहते हैं। आव्यूह A के परिवर्त को A^I या A^T से प्रदर्शित करते हैं।

उदाहरण- $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^I = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

9- एक वर्ग आव्यूह A सममित कहलाता है यदि $A^I = A$

उदाहरण- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ एक सममित आव्यूह है क्योंकि $A^I = A$

10- एक वर्ग आव्यूह A विषम सममित आव्यूह कहलाता है यदि $A^I = -A$ विषम सममित आव्यूह के विकर्ण के सभी अवयव शून्य होते हैं।

उदाहरण- $A = \begin{pmatrix} 0 & e & f \\ -e & 0 & g \\ -f & -g & 0 \end{pmatrix}$ एक विषम सममित आव्यूह है। क्योंकि $A^I = -A$

11- यदि A और B एक ही कोटि के दो वर्ग आव्यूह इस प्रकार हों कि गुणन $AB = \text{गुणन } BA = I$ (तत्समक आव्यूह) तो B को A का या A को B का व्युत्क्रम आव्यूह कहते हैं। और इसे A^{-1} या B^{-1} के द्वारा निरूपित करते हैं। ऐसी दशा में आव्यूह A और B व्युत्क्रमणीय आव्यूह कहलाते हैं।

vk0; wjka dk ; ksx

यदि **A** और **B** समान कोटि के आव्यूह है तो उनका योगफल **A+B** वह आव्यूह होता है जिसका प्रत्येक अवयव **A** और **B** के संगत अवयवों के योग के बराबर है।

$$\begin{aligned} \text{उदाहरण— } A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \\ A+B &= \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} \end{aligned}$$

vk0; wjka dk xq ku

यदि **A** और **B** दो ऐसे आव्यूह है कि **A** के स्तम्भों की संख्या **B** की पंक्तियों की संख्या के बराबर हो तो आव्यूह **A** और **B** का गुणन **AB** होगा। आव्यूह **AB** के अवयवों को प्राप्त करने के लिए **A** की पंक्तियों तथा **B** के स्तम्भों को लेकर अवयवों के क्रमानुसार गुणन करते है और तदोपरांत इन गुणनफलों का योगफल ज्ञात करते है।

$$\text{उदाहरण— } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{प्रथम पंक्ति}(R_1) \\ \text{दूसरी पंक्ति}(R_2) \end{array}$$

(C₁)प्रथम स्तम्भ दूसरा स्तम्भ(C₂)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{गुणनफल } AB &= \begin{pmatrix} R_1 \times C_1 & R_1 \times C_2 \\ R_2 \times C_1 & R_2 \times C_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 2 + (-1) \times (-1) + 2 \times 5 & 1 \times 7 + (-1) \times 1 + 2 \times (-4) \\ 0 \times 2 + 3 \times (-1) + 4 \times 5 & 0 \times 7 + 3 \times 1 + 4 \times (-4) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

अध्यापक का नाम— भरत सिंह ग्याला , प्रवक्ता (गणित) के 0एन0यू0रा0मॉ0इ0का0 पिथौरागढ़

$$= \begin{pmatrix} 2+1+10 & 7-1-8 \\ 0-3+20 & 0+3-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -2 \\ 17 & -13 \end{pmatrix}$$

यदि A एक ऐसा आव्यूह है कि इसके व्युत्क्रम (A^{-1}) का अस्तित्व है तो प्रारंभिक पंक्ति संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा A^{-1} ज्ञात करने के लिए $A=IA$ लिखते हैं और केवल पंक्ति संक्रियाओं का प्रयोग (स्तम्भ संक्रियाओं का कदापि नहीं) $A=IA$ पर तब तक करते हैं जब तक कि $I=BA$ नहीं मिल जाता है। इस प्रकार प्राप्त आव्यूह B , आव्यूह A का व्युत्क्रम होगा।

इसी प्रकार यदि स्तम्भ संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा A^{-1} ज्ञात करना चाहते हैं तो $A=AI$ लिखते हैं और $A=AI$ पर केवल स्तम्भ संक्रियाओं का प्रयोग (पंक्ति संक्रियाओं का कदापि नहीं) तब तक करते हैं जब तक कि $I=AB$ नहीं मिल जाता है। इस प्रकार प्राप्त आव्यूह B , आव्यूह A का व्युत्क्रम होगा।

उदाहरण— यदि $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ तो प्रारंभिक रूपान्तरण के प्रयोग से इसका व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

प्रारंभिक पंक्ति संक्रियाओं का प्रयोग करने पर $A=IA$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

$R_2 \Rightarrow R_2 - 2R_1$ के प्रयोग द्वारा—

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} A$$

$R_2 \Rightarrow R_2/5$ के प्रयोग द्वारा

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix} A$$

$R_1 \Rightarrow R_1 + R_2$ के प्रयोग द्वारा $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix} A$

$$I=BA$$

$$A^{-1}=B = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

अध्यापक का नाम- भरत सिंह ग्याला ,प्रवक्ता (गणित) के0एन0यू0रा0मॉ0इ0का0 पिथौरागढ़

ijh{kk dh nf'V l s dN egRo i w k z i z u

1- यदि $F(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ है तो सिद्ध कीजिए कि

$$F(x).F(y)=F(x+y)$$

2- यदि $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ है तो $A^2 - 5A + 6I$ का मान ज्ञात कीजिए

3- निम्नलिखित आव्यूहों को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में ज्ञात कीजिए-

a- $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ b- $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

4- निम्नलिखित आव्यूहों के व्युत्क्रम, यदि उनका अस्तित्व है तो प्रारम्भिक रूपान्तरण के प्रयोग से ज्ञात कीजिए-

a- $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ b- $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

5- आव्यूह X ज्ञात कीजिए यदि $X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ है।

6- मान लीजिए कि $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ है।

एक ऐसा आव्यूह D ज्ञात कीजिए कि $CD - AB = O$ हो।

7- समीकरण $\begin{pmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$ से a, b, c तथा d के मान ज्ञात कीजिए।

अध्यापक का नाम- भरत सिंह ग्याला ,प्रवक्ता (गणित) के0एन0यू0रा0मॉ0इ0का0 पिथौरागढ़

